Guía de Ingreso Universitario

Edición 2025



750 problemas propuestos

Buenos Aires

¿QUÉ ES Y PARA QUÉ SIRVE LA **MATEMÁTICA**?

Matemática es la ciencia que representa cantidades, y muestra cómo se relacionan entre sí distintas cantidades y mediante qué operaciones. Tiene un alfabeto, llamado sistema de numeración. Cualquier cosa cuantificable, se representa con algún sistema de numeración. Tiene una sintaxis matemática, letras (coeficientes, variables e incógnitas), expresiones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones, identidades, operaciones con reglas a cumplir. Matemática también usa representaciones visuales, llamada geometría. Con la representación matemática de cantidades y las relaciones entre ellas, más la geometría, podemos resolver problemas, y dar soporte a otras ciencias que también usan cantidades y representaciones visuales.

¿QUÉ ES Y PARA QUÉ SIRVE LA **FÍSICA**?

Física es la ciencia que, en general, descubre y estudia las leyes de la naturaleza que rigen el funcionamiento de todo el Universo, desde lo más pequeño hasta lo más grande. Usa magnitudes físicas cuantificables, y las relaciones entre ellas, conforme definiciones matemáticas. Usa a la matemática como herramienta y lenguaje.

LA **MENTE**. La herramienta más poderosa que tiene Ud a su disposición, es su mente. Con la mente aprendemos. Tanto si Ud piensa "no puedo" como si piensa "puedo", en ambos casos, tiene Ud razón. Piense y elija los pensamientos correctos, y ponga sus recursos en acción. Maneje Ud el poder del pensamiento a su favor. Decídalo ahora. Ud tiene la libertad de hacerlo. Ponga, con la mayor emoción posible, las mejores ideas en su mente. Todas sus metas que sean positivas para Ud y para los demás (el saber es una) pueden ser logradas, con una actitud positiva, una mente despierta y creativa, y la fuerza de voluntad. Su cerebro tiene 86 mil millones de neuronas, todas ellas están bajo su exclusivo control, gratis, toda la vida. Úselas bien, porque quien maneja su mente, maneja su vida.



Este archivo actualizado, más información, consultas y comentarios en el site:

http://textospreuni.home.blog/



Suscribite al canal Estudiar es más Barato

https://www.youtube.com/@estudiaresmasbarato

Símbolos

Símbolo	Significado	Se lee
p ∧ q	Conjunción	p y q
p ∨ q	Disyunción incluyente	p y/o q
$\bar{p}$	Negación	no q
p ⊻ q	Disyunción excluyente	p ó q
A ∩ B	Intersección	A intersección B
A ∪ B	Unión	A unión B
$\overline{A}$	Complemento	Complemento de A
A – B	Diferencia	A diferencia B
A ∆ B	Diferencia simétrica	A diferencia simétrica B
x ∈ A	Pertenencia	x pertenece a A
x ∉ A	No pertenencia	x no pertenece a A
A ⊆ B	Subconjunto	A es subconjunto de B
A ⊈ B	No es subconjunto	A no es subconjunto de B
∅	Conjunto vacío – también { }	
$\mathcal{U}$	Conjunto universal	
x ≅ 3	Aproximadamente	x es aproximadamente igual a 3
∃	Existe	Existe (al menos uno)
∄	No existe	No existe (ni siquiera uno)
∀x	Para todo	Para todo x
x / y=2x	Tal que	x tal que y = 2x
$\sum_{i=1}^{n} i\ x$	Sumatoria	Sumatoria desde i=1 hasta i=n, de los términos i x
a±b	Suma ó resta	a más/menos b
$\lvert x \rvert$	módulo (o norma)	módulo (o norma) de x
$\sqrt[n]{x}$	n: índice ; x: radicando	raíz enésima de x
x^n	n: exponente ; x: base	x elevado a la n
$\log_b x$	logaritmo ; b: base	logaritmo, en base b, de x
y ∝ x	proporcionalidad	y varía en forma directamente proporcional a x

Alfabeto griego

Mayúscula	Minúscula	Nombre en español
Α	α	Alfa
Β	β	Beta
Γ	γ	Gama
Δ	δ	Delta
Ε	ε	Épsilon
Ζ	ζ	Zeta
Η	η	Eta
Θ	θ	Theta
Ι	ι	Iota
Κ	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
Μ	μ	Mu
Ν	ν	Nu
Ξ	ξ	Xi
Ο	ο	Ómicron
Π	π	Pi
Ρ	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
Τ	τ	Tau
Υ	υ	Ípsilon
Φ	φ , ϕ	Fi
Χ	χ	Ji
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

-Nunca consideres al estudio como una obligación, sino como la oportunidad de penetrar en el maravilloso mundo del conocimiento del universo.- Albert Einstein.

-No hay sustituto del trabajo duro.- Thomas Edison.

-No fuísteis criados para vivir como bestias, sino para vivir una vida en pos de la virtud y la sabiduría.- Dante Alighieri.

-Cuando se nace pobre, estudiar es el mayor acto de rebeldía contra el sistema. El saber rompe las cadenas de la esclavitud.- Tomás Bulat.

-Odié cada minuto de entrenamiento, pero me dije "no te rindas, sufre ahora y vive el resto de tu vida como un campeón".- Muhammad Ali.

-Para tener éxito, tus deseos de triunfar deberían ser más grandes que tu miedo de fracasar.- Bill Cosby.

-No digas que no tienes suficiente tiempo. Tienes exactamente la misma cantidad de horas que tuvieron Pasteur, Miguel Ángel, Helen Keller, la Madre Teresa de Calcuta, Leonardo da Vinci, Thomas Jefferson y Albert Einstein.- Harriet Jackson Brown Jr.

-El experto en algo, fue alguna vez un novato.- Helen Hayes.

-Si estás estudiando para un examen, no estés pensando en los resultados. Si siempre estás preocupado por los resultados, no puedes estudiar mucho.- Deepak Chopra.

-Pueden, porque creen que pueden.- Virgilio.

-No se trata de la meta. Se trata de crecer para convertirte en la persona que puede lograr esa meta.- Anthony Robbins.

-Yo entrené durante cuatro años para correr tan sólo diez segundos. Hay personas que, por no ver resultados en dos meses, se rinden y dejan. A veces, el fracaso se lo busca uno mismo.- Usain Bolt.

-No importan las circunstancias, sólo importa tu estado, cambiar tu estado, es lo que hará cambiar las circunstancias.- Pablo.

-Considero más valiente al que conquista sus deseos, que al que conquista a sus enemigos, ya que la victoria más dura es la victoria sobre uno mismo.- Aristóteles.

-Ninguna cantidad de evidencia logrará convencer a un idiota.- Mark Twain.

-Para que el mal triunfe, sólo se necesita que los buenos no hagan nada.- Edmund Burke.

-Nos prohíben todo lo que cura: besos, abrazos, cariño, oxígeno de los bosques y playas, agua salada del mar, buena alimentación, con el objetivo de que nuestro sistema inmunológico enferme de tristeza. – Cristina Martín Jiménez.

Índice

1. CONCEPTOS Y OPERACIONES BÁSICAS

1.1 Lógica proposicional

TEMA EXPLICADO EN EL VIDEO 1.1



https://youtu.be/EL2mSUyuKCE

El lenguaje tiene diversas funciones[1], las mismas pueden clasificarse en las funciones:

1. **Afirmativa,** cuando afirmamos o negamos algo.
2. **Exclamativa,** cuando simplemente expresamos una opinión.
3. **Directiva,** cuando indicamos a alguien hacer algo.
4. **Interrogativa,** la usamos al hacer una pregunta.

La lógica proposicional usa la función afirmativa en lo que llama proposiciones. Una **proposición** es una afirmación. Las afirmaciones tienen valor de verdad, es decir que son verdaderas o falsas, pero no ambas. Para identificar las proposiciones se suelen usar las letras p, q, r, s, etc.

Ej N°1:

a) p: "el número 5 es primo" la proposición p es verdadera

b) q: "América fue descubierta en 1942" la proposición q es falsa

c) r: "cierre la ventana" r no es una proposición, es una orden

d) s: "¡qué lindo día de sol!" s no es una proposición, es una exclamación

e) $2 + 2 = 5$ la proposición es falsa

g) $3x + 2 = 5$ es verdadera cuando $x = 1$

Una proposición puede ser **simple** o **compuesta**. Es simple, cuando expresa una sola afirmación (como en los ejemplos anteriores a-g). Una proposición es compuesta, cuando conecta dos o más afirmaciones mediante una conectiva lógica, quedando las **operacio-**

[1] Existen distintos modelos de *funciones del lenguaje*, por ej. https://cvc.cervantes.es/ensenanza/biblioteca_ele/diccio_ele/diccionario/funcioneslenguaje.htm

nes lógicas con sus conectivas correspondientes, que veremos a continuación:

1.1.1 Conjunción

Ej N°2: "compraré zapatillas y almorzaré en el centro"

Es una proposición compuesta que se compone de las siguientes proposiciones simples:

p: "compraré zapatillas" q: "almorzaré en el centro"

se simboliza la operación conjunción como: $p \wedge q$

se lee: "p y q"

La conjunción es verdadera, cuando son verdaderas ambas proposiciones simples, simultáneamente. Y como las simples pueden ser verdaderas o falsas, según cómo se combinen los valores de verdad de las proposiciones simples, será la proposición compuesta, eso es lo que muestra la tabla de verdad de más abajo:

tabla de verdad de la operación conjunción:

p	$\wedge$	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	F

1.1.2 Disyunción incluyente

Ej N°3: "compraré zapatillas y/o compraré medias"

Es una proposición compuesta que se compone de las siguientes proposiciones simples:

p: "compraré zapatillas" q: "compraré medias"

se simboliza la operación disyunción incluyente como: $p \vee q$

se lee: "p y/o q"

La disyunción incluyente es verdadera, cuando es verdadera una, otra, o ambas proposiciones simples. Y como las simples pueden ser verdaderas o falsas, según cómo se combinen los valores de verdad de las proposiciones simples, será la proposición compuesta, eso es lo que muestra la tabla de verdad de más abajo:

tabla de verdad de la operación disyunción incluyente:

p	$\vee$	q
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

1.1.3 Negación

Ej N°4: "nací en Iguazú"

La operación negación sólo necesita una proposición, cuyo valor de verdad será invertido.

p: "nací en Iguazú" $\bar{p}$: "no nací en Iguazú"

se simboliza la negación como: -p ¬p $\bar{p}$

se lee: "no p"

tabla de verdad de la operación negación:

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

Las tres operaciones vistas hasta acá, son las llamadas **operaciones básicas** o **canónicas**, porque con ellas se puede armar cualquier otra operación.

Ej N°5: si una proposición expresa p: "hoy es martes"

Entonces la negación es $\bar{p}$: "hoy no es martes"

1.1.4 Disyunción excluyente

Ej N°6: "soy hincha de Boca, o soy hincha de River"

Es una proposición compuesta que se compone de las siguientes proposiciones simples:

p: "soy hincha de Boca" q: "soy hincha de River"

se simboliza la disyunción excluyente como: p ⊻ q

se expresa la operación lógica como: "p o q"

La disyunción excluyente es verdadera, cuando es verdadera una, y sólo una, de las proposiciones simples. Está excluída la posibilidad que sean verdaderas ambas, por eso "excluyente", y por eso la otra disyunción, vista más arriba, se llama "incluyente". Y como las simples pueden ser verdaderas o falsas, según cómo se combinen los valores de verdad de las proposiciones simples, será la proposición compuesta, es lo que muestra la tabla de verdad de más abajo:

tabla de verdad de la operación disyunción excluyente:

p	⊻	q
V	F	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

Había una vez un pueblo llamado DISYUNCIÓN, que tenía escasez de agua. Llegó un ingeniero hidráulico llamado INCLUYENTE, quien les recomendó buscar agua en las montañas, agua de cascadas, agua por condensación, hacer pozos, buscar ríos o arroyos. En la reunión, el señor EXCLUYENTE preguntó, ¿encaramos la búsqueda sólo de una de esas

cuatro maneras, verdad, ingeniero? A lo que el ingeniero respondió, "la recomendación no quiso dar opciones EXCLUYENTES, una sí, la otra no; por supuesto, si Uds disponen de suficiente cantidad de gente, sin dudas lo mejor será INCLUÍR las cuatro búsquedas juntas simultáneamente, y no tener que entrar en la DISYUNTIVA si hacer una u otra".

1.1.5 Condicional

Para que un condicional sea verdadero, debe ser verdadera la consecuencia (consecuente), cuando es verdadera la causa (antecedente):

Ej N°7: "si llevo comida, me alimentaré"

Si el antecedente es verdadero (p: "llevé comida") el consecuente necesariamente debe ser verdadero (q: "me alimentaré") para que la compuesta sea verdadera, o sea, es verdad lo que dice la oración, si es verdadera q cuando es verdadera p, lo que se puede escribir de diferentes maneras:

"q si p" "p implica q" "si p, entonces q"

Otra forma de decirlo es:

El condicional verdadero significa que para que el consecuente sea verdadero, es necesario que el antecedente también lo sea (condición necesaria). Se configura el esquema de posibilidades, según el valor de verdad de las proposiciones simples, en la tabla de verdad de más abajo:

p: "llevo comida" q: "me alimentaré"

se simboliza el condicional como: $p \rightarrow q$

se lee: "p entonces q"

tabla de verdad del condicional:

p	→	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

1.1.6 Bicondicional

Es un condicional de doble vía, es decir p implica q, y al mismo tiempo q implica p. Es el equivalente al "sí y sólo si" también llamado "condición necesaria y suficiente", y es lo que usamos para equivalencia entre dos expresiones, por lo que también se dice "p equivale a q".

Ej N°8: "si obtengo un 10 en el examen, aprobaré con la máxima calificación"

La proposición compuesta es verdadera, cuando, ambas proposiciones simples son iguales, es decir es una relación de equivalencia:

p: “obtengo un 10 en el examen” q: “apruebo con la máxima calificación”

se simboliza el condicional como: $p \leftrightarrow q$

se expresa la operación lógica como: “p sí y sólo sí q”

tabla de verdad del bicondicional:

p	↔	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

1.2 Conjuntos

TEMA EXPLICADO EN EL VIDEO 1.2



https://youtu.be/dlw7q8gVOnY

Un conjunto es una agrupación de elementos bien definidos, de similar o distinta naturaleza. Los conjuntos se pueden definir de dos maneras:

Definición por comprensión: se define un conjunto por comprensión, cuando se da la proposición que los elementos pertenecientes al conjunto, hacen verdadera.

Ej N°9: A = { letras del alfabeto español }

B = { días de la semana }

C = { números primos mayores que 6 }

D = { x / x satisface la ecuación $7x - 2 = 0$ }

E = { letras que componen la palabra “Maradona” }

Definición por extensión: se define un conjunto por extensión, cuando se da la lista de los elementos pertenecientes al conjunto. Si analizamos los conjuntos anteriores (ej. 9), por extensión sería colocar los elementos concretos.

Ej N°10: A = { a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, ñ, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z }

B = { lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo }

C = { 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 … }

D = { 2/7 }

E = { a, d, m, n, r, o }

Las primeras tres **operaciones de conjuntos** que veremos a continuación (intersección, unión y complemento) son las llamadas "operaciones canónicas". Con ellas, se pueden armar todas las demás operaciones.

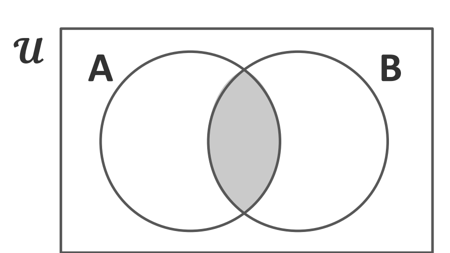
1.2.1 Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen tanto al A como al B. Los elementos del conjunto intersección son los elementos del universo $\mathcal{U}$, que hacen verdadera la proposición compuesta: $x \in A \wedge x \in B$.

En símbolos:

$A \cap B = \{ x \in \mathcal{U} \;/\; x \in A \wedge x \in B \}$

En diagrama de Venn:



Observaciones: Cuando $A \cap B = \{\,\} = \varnothing$ (conjunto vacío) se dice que A y B son conjuntos **disjuntos**

Ej N°11: sea el conjunto universal formado por los siguientes elementos:

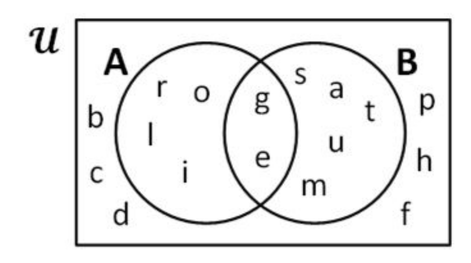
$\mathcal{U}$ = { a , b , c , d , e , f , g , h , i , l , m , o , p , r , s , t , u }

Y sea el conjunto A, que tiene como elementos a las letras del nombre "Rogelio":

A = { e , g , i , l , o , r }

Y otro conjunto B, formado por las letras, tomadas del conjunto universal, que componen el apellido "Sagastume": B = { a , e , g , m , s , u }

La representación en diagramas de Venn de estos conjuntos es:



Los conjuntos tienen intersección, y esta es:

$A \cap B = \{ e , g \}$

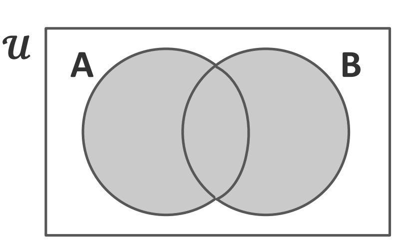
1.2.2 Unión

La unión de dos conjuntos A y B, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A y/o al B. Los elementos del conjunto unión son los elementos del universo $\mathcal{U}$, que hacen verdadera la proposición compuesta: $x \in A \vee x \in B$.

En símbolos:

$A \cup B = \{ x \in \mathcal{U} \;/\; x \in A \vee x \in B \}$

En diagrama de Venn:



Ej N°12: tomando los conjuntos del Ej. 11, el conjunto unión es:

$A \cup B = \{ a , e , g , i , l , m , o , r , s , t , u \}$

1.2.3 Complemento

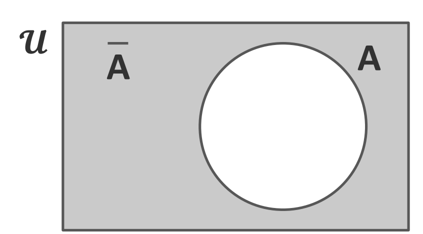
El complemento de un conjunto A es el conjunto formado por los elementos que no pertenecen al conjunto A, es decir los elementos del universo $\mathcal{U}$, que hacen verdadera la proposición: $x \notin A$. Lo que expresado en símbolos es:

En símbolos:



$\overline{A} = \{ x \in \mathcal{U} \;/\; x \notin A \}$

En diagrama de Venn:



Ej N°13: tomando los conjuntos del Ej. 11, el complemento de A es:

$\overline{A} = \{ a , b , c , d , f , h , m , p , s , t , u \}$

El complemento de B es: $\overline{B} = \{ b , c , d , f , h , i , l , o , p , r \}$

El complemento de A ∪ B (para este ejemplo) es: $\overline{A \cup B} = \{ b , c , d , f , h , p \}$

1.2.4 Diferencia

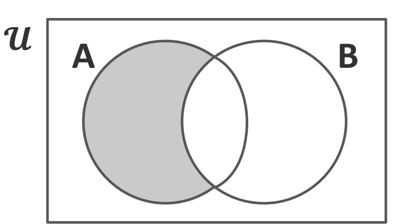
La diferencia entre un conjunto A y un conjunto B, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A, pero no al B.

Los elementos del conjunto diferencia son los elementos del universo $\mathcal{U}$, que hacen verdadera la proposición compuesta: $x \in A \wedge x \notin B$.

En símbolos:

$A - B = \{ x \in \mathcal{U} \;/\; x \in A \wedge x \notin B \}$

En diagrama de Venn:



En la jerga se le suele llamar "la medialuna" ☾

Observaciones: La diferencia entre A y B se puede expresar en función de las tres operaciones básicas: $A - B = A \cap \overline{B}$

Ej N°14: tomando los conjuntos del Ej. 11, la diferencia A – B es:

A – B = { i , l , o , r }

Y la diferencia B – A es:

$B - A = B \cap \overline{A}$ = { a , m , s , t , u }

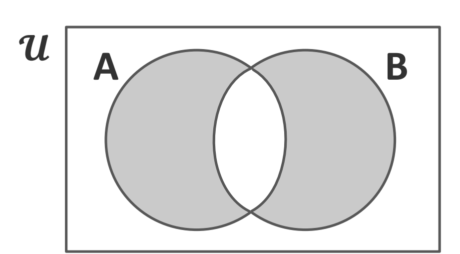
1.2.5 Diferencia simétrica

La diferencia simétrica entre un conjunto A y un conjunto B, es la unión de las dos diferencias entre ellos, esto es, el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A (y no al B), unión los elementos del B, (peor no al A). Los elementos de la diferencia simétrica, son los elementos del universo $\mathcal{U}$, que hacen verdadera la proposición compuesta: $x \in A \veebar x \in B$.

En símbolos:

$A \,\Delta\, B = \{ x \in \mathcal{U} \,/\, x \in A \veebar x \in B \}$

En diagrama de Venn:



Ej N°15: tomando los conjuntos del Ej. 11, la diferencia simétrica A Δ B es:

A Δ B = { a , i , l , m , o , r , s , t , u }

1.2.6 Cardinal de un conjunto

El cardinal de un conjunto es la cantidad de elementos que tiene dicho conjunto (y es una cantidad exacta). Lograr el cardinal de un conjunto, significa directamente "contar sus elementos a mano", o usar "técnicas de conteo". Se simboliza el cardinal de un conjunto A como:

- | A |
- #A
- n(A)

Ej. 16: los cardinales de los conjuntos del Ej. 11 son:

$|\,\mathcal{U}\,| = 17$ | A | = 6 | B | = 6

Ej. 17: el cardinal del conjunto del Ej. 15 es: | A Δ B | = 9

1.2.7 Subconjuntos

Un conjunto A es subconjunto de otro conjunto B, cuando todos los elementos de A pertenecen al B, pudiendo incluso llegar a ser igual al B. Ante esto se dice que A es subconjunto de B, y se simboliza: $A \subseteq B$

Como todo conjunto tiene a todos sus elementos incluídos en sí mismo, todo conjunto es subconjunto de sí mismo: $A \subseteq A$

También se dice que A está incluído en B. Cuando trabajamos con un conjunto universal, todos los conjuntos con que trabajamos, son subconjuntos del universal.

Ej N°18: tomando los conjuntos del Ej. 11 vemos dos relaciones:

$A \subseteq \mathcal{U}$ $\qquad B \subseteq \mathcal{U}$

1.2.8 Propiedades básicas de las operaciones de conjuntos

A continuación, las propiedades más básicas de las operaciones vistas (hay más):

Conmutativa:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Idempotente:	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Elemento neutro:	$A \cap \mathcal{U} = A$	$A \cup \varnothing = A$
Complemento:	$\overline{\overline{A}} = A$ doble complemento	
	$\overline{\emptyset} = \mathcal{U}$ complemento del conjunto vacío	
	$\overline{\mathcal{U}} = \emptyset$ complemento del universo	

Con las tres operaciones canónicas (intersección, unión y complemento), se pueden representar todas las demás.

1.2.9 Problemas básicos de conjuntos

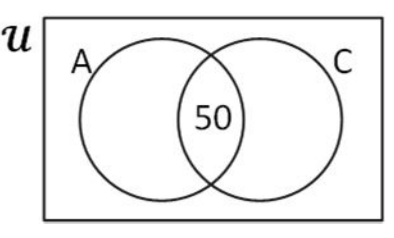
Conjuntos, definidos por comprensión y extensión. Álgebra de conjuntos: intersección, unión, complemento, diferencia y diferencia simétrica. Analogía con lógica.

1.1) En una academia se realiza una encuesta a sus 120 alumnos, obteniendo lo siguiente: 80 quieren ser actores, 70 quieren ser cantantes, y 50 quieren ser actores y cantantes. Representar la información dada, y hallar cuántos quieren ser actores solamente, y cuántos no quieren ser ni actores ni cantantes. LT-TP1-17

R: $|A| = 80 \quad |C| = 70$

$|A \cap C| = 50 \quad |u| = 120$

30 quieren ser actores solamente, o sea $|A \cap \bar{C}| = 30$

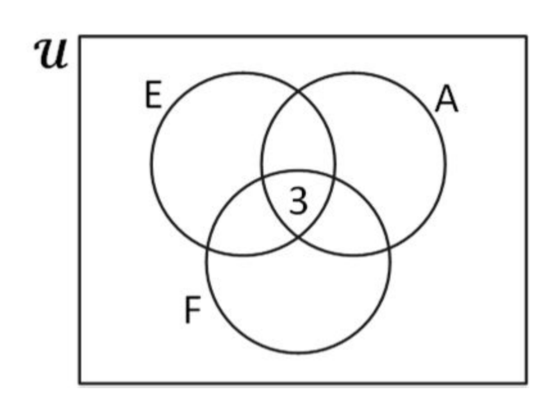


20 no quieren ser ni actores ni cantantes, o sea $|\overline{A \cup C}| = 20$

1.2) En una investigación hecha en un grupo de 100 estudiantes, la cantidad de personas que estudiaban idiomas fue la siguiente. Español, estudiaban 28. Alemán, 30 alumnos. Francés, lo estudiaban 42. Español y alemán, 8 alumnos. Español y francés, 10. Alemán y francés, 5. Los tres idiomas, 3 alumnos. Representar la información relevada, y hallar cuántos estudian solamente francés y español, y cuántos alemán solamente.

R: $|E| = 28$ $|A| = 30$ $|F| = 42$ $|A \cap E \cap F| = 3$ LT-TP1-20

$|E \cap A| = 8$ $|E \cap F| = 10$ $|A \cap F| = 5$ $|\mathcal{U}| = 100$



7 estudian solamente francés y español, o sea $|\bar{A} \cap F \cap E| = 7$

20 estudian solamente alemán, o sea $|A \cap \bar{F} \cap \bar{E}| = 20$

1.2.10 Conjuntos de números

Los números son usados para representar cantidades. Los primeros números usados fueron los números **naturales**, que son un conjunto infinito y ordenado. El conjunto de los naturales tiene primer elemento, pero no tiene último, tiene saltos discretos entre cada elemento, y con relación de orden (mayor y menor) entre cada par de elementos:

$\mathbb{N} = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \dots \}$

Los naturales son los números que se usan para hacer conteos. ¿Hay sillas? ¿Cuántas sillas tenemos? Usamos números naturales cuando contamos la cantidad de sillas. ¿Tenemos un campo, y nuestro conjunto A son las vacas? Sabremos cuántas vacas tenemos, cuando hacemos el conteo, usando números naturales, para determinar el cardinal de A. Luego ocurrió que hizo falta representar la ausencia de cantidad, es decir "no tengo nada", y surge el número cero, esto es, el **conjunto**: { 0 }

A los dos conjuntos anteriores, se los suele unir en el conjunto "naturales con el cero":

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{ 0 \} = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \dots \}$

Después, se necesitaron los números negativos, similares a los naturales (lo mismo, pero "del otro lado del cero"), se llaman **naturales negativos** (o enteros negativos):

$\mathbb{N}^- = \mathbb{Z}^- = \{ \dots -6 , -5 , -4 , -3 , -2 , -1 \}$

Todos los anteriores juntos, son los **enteros**:

$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{Z}^- = \{ \dots -6 , -5 , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \dots \}$

Un número entero "a" es **divisible** por otro número entero "b" (no nulo), cuando el cociente a/b da como resultado otro entero.

En ese caso, se dice "a es múltiplo de b", "a es divisible por b", "b es divisor de a", ó "b divide a a". Esto último se escribe b | a.

Dados $a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0$; si $\exists\ a/b = c \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \mid a$

Aquellos números enteros que son divisibles por 2, se llaman **pares**, al conjunto de los pares lo definimos por comprensión, usando una nueva variable k, que se llama **parámetro**. Los números pares, entonces, están *parametrizados* dentro de los enteros:

Pares = $\{ x / k \in \mathbb{Z} \wedge x = 2k \}$

También podemos *parametrizar* a los números pares, dentro de los naturales:

Pares = $\{ x / k \in \mathbb{N} \wedge x = 2k \} = \{ 2 , 4 , 6 , 8 , 10 \dots \}$

Los que no son pares, se llaman **impares**:

Impares = $\{ x / k \in \mathbb{Z} \wedge x = 2k - 1 \}$

Se llaman números **primos**, aquellos números naturales mayores que uno, que son divisibles sólo por uno y por sí mismos. El conjunto de los números primos es infinito:

Primos = { 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 ... }

Todos los números naturales mayores que uno que no son primos, se llaman **compuestos**, es decir, aquellos que tienen, como mínimo, algún divisor adicional, aparte del uno y él mismo.

Compuestos = { 4 , 6 , 8 , 9 , 10 , 12 , 14 , 16 ... }

Una técnica, habilitada por el *teorema fundamental de la aritmética* (el teorema que demuestra que se puede hacer esto siempre), descompone un número compuesto, en el producto de sus factores primos.

Esa descomposición, es como una "firma" del número, porque queda una secuencia de números primos que es exclusivamente suya.

Ej N°19: descomponer el número 300 en su producto de factores primos.

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	$300 = 2^2 . 3 . 5^2$

Ej N°20: descomponer el número 1800 en su producto de factores primos.

1800	2
900	2
450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	$1800 = 2^3 . 3^2 . 5^2$

Descomponer los siguientes números en sus productos de factores primos:

1.3) a) 17 b) 23 c) 75 d) 2760 e) 5040 gp

f) 7560 g) 12600 h) 38300

Respuestas: a) 17 = 17 b) 23 = 23 c) $75 = 3 . 5^2$ d) $2760 = 2^3 . 3 . 5 . 23$

e) $5040 = 2^4 . 3^2 . 5 . 7$ f) $7560 = 2^3 . 3^3 . 5 . 7$

g) $12600 = 2^3 . 3^2 . 5^2 . 7$ h) $38300 = 2^2 . 5^2 . 383$

Resolver los siguientes problemas, sabiendo antes operaciones de conjuntos, números naturales, el cero, naturales negativos y enteros.

1.4) Expresar por extensión: $A = \{ x \in \mathbb{Z} / x \geq 20 \}$ gp

1.5) Expresar por extensión: $B = \{ x \in \mathbb{N} / 5 < x \leq 10 \}$ gp

1.6) Expresar por extensión: $C = \{ x \in \mathbb{Z} / x \leq -2 \}$ gp

1.7) Expresar por extensión: $D = A \cap B$ gp

1.8) Expresar por extensión: $E = A \cup B$ gp

1.9) Expresar por extensión: $F = \mathbb{N} - A$ gp

1.10) Expresar por extensión: $G = F \cap B$ gp

1.11) Expresar por extensión: $H = E \, \Delta \, F$ gp

1.12) Expresar por extensión: $L = \{ x \in \mathbb{N} / x \mid 17 \ \wedge \ x \in Primos \}$ gp

1.13) Expresar por extensión: $M = \{ x \in \mathbb{N} / 2x + 13 = -1 \}$ web/gp

1.14) Expresar por extensión: $N = \{ x \in \mathbb{N}_0 / 2x - 13 < 3 \}$ web/gp

Respuestas a los problemas → 1.4 a 1.14 anteriores:

1.4) $A = \{ 20 , 21 , 22 , 23 , 24 \ \ldots \}$

1.5) $B = \{ 6 , 7 , 8 , 9 , 10 \}$

1.6) $C = \{ \ldots -7 , -6 , -5 , -4 , -3 , -2 \}$

1.7) $D = \emptyset$

1.8) $E = \{ 6, 7, 8, 9, 10, 20, 21, 22, 23, 24 \ldots \}$

1.9) $F = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \ldots 17 , 18 , 19 \}$

1.10) $G = \{ 6 , 7 , 8 , 9 , 10 \} = B$

1.11) $H = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 11 , 12 , 13 , 14 \ldots \}$

1.12) $L = \{ 17 \}$

1.13) $M = \{ \}$

1.14) $N = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 \}$

Se dice que dos (o más) números son **coprimos** (o primos entre sí) cuando tienen sólo al número uno como divisor común entre ellos.

Ej N°21: analizar 70 y 99.

70	2
35	5
7	7
1	70 = 2 . 5 . 7

99	3
33	3
11	11
1	99 = 3^2 . 11

Por lo tanto 70 y 99 son coprimos.

Se llama **Máximo Común Divisor (MCD)** de dos o más números naturales, al máximo de todos los posibles divisores simultáneos de todos ellos. Se obtiene el MCD (x,y) multiplicando los factores primos comunes a (x,y), con su menor exponente.

Ej N°22: hallar el MCD (30 ; 36).

30	2
15	3
5	5
1	30 = 2 . 3 . 5

36	2
18	2
9	3
3	3
1	36 = 2^2 . 3^3

Y según lo dicho: MCD (30 ; 36) = 2 . 3 = 6

Se llama **Mínimo Común Múltiplo (mcm)** de dos o más números naturales, al mínimo de todos los posibles múltiplos simultáneos de todos ellos. Para obtener el mcm (x,y) se multiplican todos los factores primos, comunes y no comunes a (x,y), con su mayor exponente.

Ej N°23: hallar el mcm (30 ; 36). Del ejemplo anterior ya tenemos la descomposición en factores primos, por lo tanto aplicamos directamente la técnica:

mcm (30 ; 36) = $2^2 . 3^3 . 5$ = 180

Existe la siguiente **propiedad que vincula MCD y mcm**:

MCD (a ; b) . mcm (a ; b) = a . b

Ej N°24: verificar la propiedad con los números 30 y 36.

MCD (30 ; 36) . mcm (30 ; 36) = 6 . 180 = 1.080

a . b = 30 . 36 = 1.080

ACTIVIDAD: resolver los siguientes problemas de MCD y mcm.

1.15) En una bodega hay tres toneles de vino, siendo sus capacidades 250, 306 y 504 litros. Se quiere envasar su contenido en una cantidad de botellas que sea exacta. Hallar la máxima capacidad de botella necesaria, y cuántas botellas se necesitan.

R: botellas de 2 litros ; se necesitan 530 botellas LT-cap2

1.16) Juan, Pedro y Diego se hacen amigos en el avión donde comparten viaje hacia el mismo destino. Por razones de trabajo, los tres deben repetir periódicamente el viaje. Juan viajará cada 8 días, Pedro lo hará cada 12 días, y Diego cada 15 días. ¿Cada cuántos días coincidirán en el aeropuerto?

R: cada 120 días LT-cap2

1.17) Hallar n, sabiendo que: MCD (75 , n) = 5 y que mcm (75 , n) = 300

R: n = 20 LT-cap2

Luego, en las operaciones de números, se necesitó usar otros números, los números **racionales**, son aquellos que se pueden escribir como un cociente de números enteros, donde el que es dividido se llama **numerador**, y el que divide se llama **denominador**. Dentro de los racionales hay tres conjuntos:

$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup$ { fraccionarios puros } $\cup$ { periódicos }

Los fraccionarios puros son los comúnmente llamados "fracciones", que no se pueden simplificar (hacer la cuenta) o sea no pueden quedar nunca enteros, por ejemplo los **fraccionarios puros**: 1/3 ; 2/7 ; –3/5 ; –7/4

Los números **periódicos** son números con infinitas cifras repetitivas fraccionarias en una secuencia de uno o varios números que se repiten interminablemente.

Ejemplos: 0,333… = $0,\overline{3}$ 2,484848… = $2,\overline{48}$ 1,3529529529… = $1,3\overline{529}$

→ Más adelante, en 1.4, volveremos a hablar de los números periódicos.

Los números periódicos también son racionales, y se pueden expresar de dos maneras, 1) el número "con coma" como arriba, ó, 2) el cociente de dos enteros. Los números que no se pueden expresar como cociente de dos enteros, se llaman números **irracio-**

nales. Los números irracionales tienen dos características esenciales, 1) tienen infinitas cifras fraccionarias (no podrían tener una cantidad finita, porque en ese caso serían racionales), 2) las infinitas cifras fraccionarias, nunca son una secuencia repetitiva (de ser así, sería un número periódico, o sea un racional).

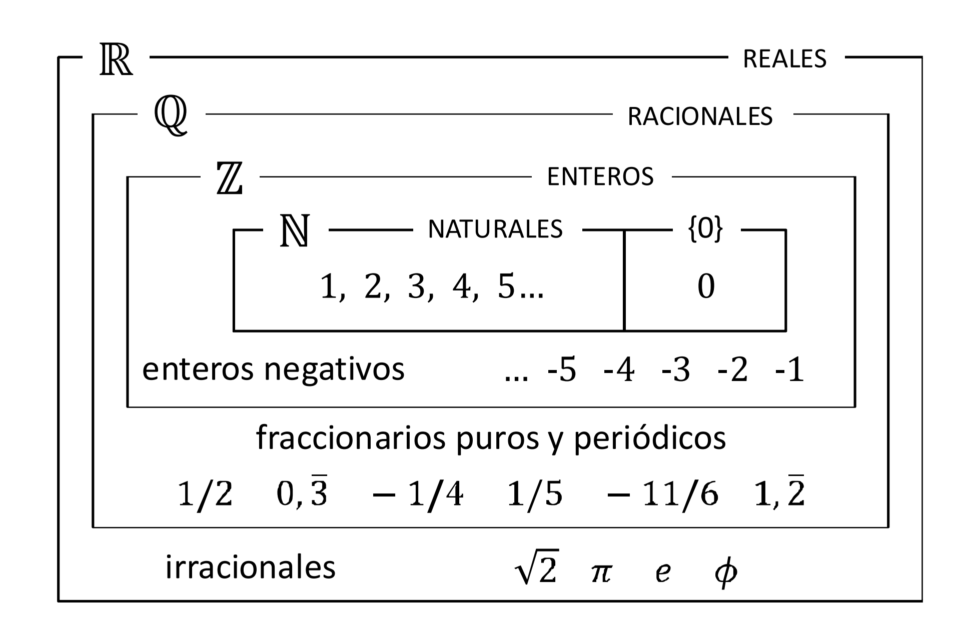
Ejemplos de números irracionales:

$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ $\sqrt{5} = 2{,}236067977...$

$\pi = 3{,}141592654...$ $e = 2{,}718281828...$

$\phi = 1{,}618033989...$

La unión de todos los conjuntos de números anteriores, es el conjunto de los números **reales**: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup$ irracionales.



El conjunto de los números reales incluye a todos los anteriores, y completa el conjunto, ahora sí, de todos los posibles números que representan cantidades, de todas las formas posibles. Concluyendo lo siguiente:

Los conjuntos de números naturales y enteros son conjuntos que llamamos **discretos**, esto es, cada elemento está separado del siguiente, y del anterior, se puede determinar el siguiente y el anterior, y la separación es conocida. Además, entre dos elementos de estos conjuntos discretos, hay elementos de otros conjuntos de números, o sea, para pasar de un entero (y natural) a otro, hay que "saltar" por conjuntos de otros números.

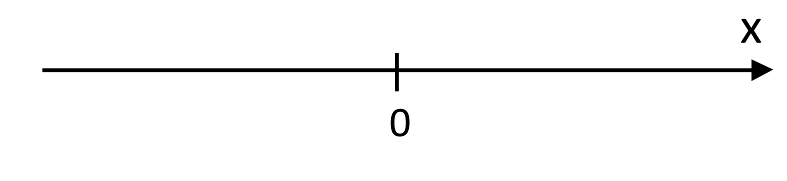
Distinto es con el conjunto de los racionales, porque para pasar de un racional a otro, si bien saltamos por encima de otro conjunto de números, la separación entre dos racionales no es siempre la misma. Ocurre que siempre, entre dos racionales, podemos encontrar otro número racional.

Por esta característica, al conjunto de los racionales, se lo llama conjunto **denso**.

La última característica que interesa resaltar (y la más importante) es la del conjunto de los números reales. Se pasa de un número real a otro, sin pasar por encima de ningún otro conjunto. No se puede determinar cuál es el siguiente número real, de un número real conocido (tampoco el anterior). Entre dos números reales, por más próximos que estén, siempre hay infinitos números reales.

El siguiente número real está tan, pero tan próximo, no lo podemos determinar, por ello los números reales se pueden ver como una recta geométrica, que está compuesta por infinitos puntos todos tan cerca que terminan conformando una recta.

Por todo esto, se dice que el conjunto de los reales es **contínuo** (un contínuo de números) que representados geométricamente como puntos, conforman una recta a la que llamamos la **recta real**, es decir un contínuo infinito de puntos desde $-\infty$ hasta $+\infty$ (la flecha indica el sentido positivo).



LA RECTA REAL

Algunos conjuntos más: $\mathbb{Z}^-$: enteros negativos $\mathbb{R}^+$: reales positivos

$\mathbb{R}^-$: reales negativos $\mathbb{R}_0^+$: reales positivos con el cero

Algunas igualdades: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{Z}^-$

$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup$ fracc. puros $\cup$ periódicos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup$ irracionales

Son subconjuntos: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

1.2.11 Intervalos

Llamamos **intervalo** a un conjunto contínuo de números reales. Se representan los intervalos de una manera sintética (más fácil que la convencional), y esa es su ventaja, según veremos a continuación.

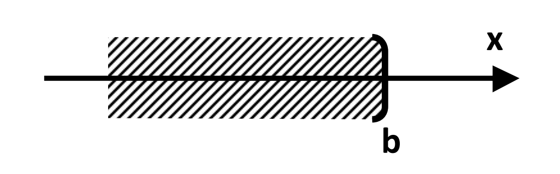
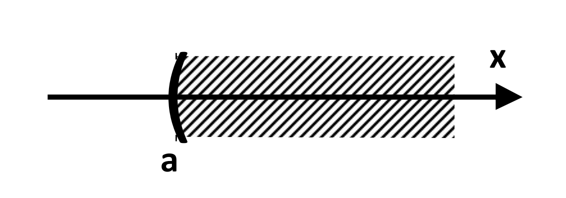
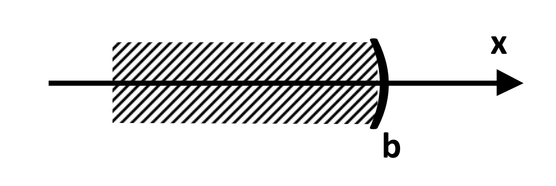
Un intervalo es **acotado** cuando el tramo contínuo que abarca, no supera ningún límite (ni inferior ni superior):

INTERVALO CERRADO:	Límite inferior/superior incluído [ ]
a b x	I = { x ∈ ℝ / a ≤ x ≤ b } en notación de intervalo: **I = [a , b]**

INTERVALO ABIERTO:	Límite inferior/superior NO incluído ( )
a b x	I = { x ∈ ℝ / a < x < b } en notación de intervalo: **I = (a , b)**

INTERVALO MIXTO:	Un límite es cerrado, el otro abierto
a b x	I = { x ∈ ℝ / a ≤ x < b } en notación de intervalo: **I = [a , b)**
a b x	I = { x ∈ ℝ / a < x ≤ b } en notación de intervalo: **I = (a , b]**

Por el contrario, un intervalo es **no acotado** cuando continúa hasta el infinito, ya sea a izquierda, a derecha o ambos:

Cerrado a izquierda, no acotado a derecha:	
	I = { x ∈ ℝ / x ≥ a } en notación de intervalo: **I = [a , +∞)**
Cerrado a derecha, no acotado a izquierda:	
	I = { x ∈ ℝ / x ≤ b } en notación de intervalo: **I = (-∞ ; b]**
Abierto a izquierda, no acotado a derecha:	
	I = { x ∈ ℝ / x > a } en notación de intervalo: **I = (a ; ∞)**
Abierto a derecha, no acotado a izquierda:	
	I = { x ∈ ℝ / x < b } en notación de intervalo: **I = (-∞ ; b)**

1.2.12 Ejercicios con intervalos

Hallar los siguientes conjuntos, y de ser posible, expresarlos en notación de intervalos:

1.18) $A = (-2\,;3) \cap (1\,;4)$ gp R: $A = (1;3)$

1.19) $B = (-\infty\,;2) \cap (0\,;4) \cap (1;5]$ gp R: $B = (1;2)$

1.20) $C = (-5\ ;\ 3] \cap (3; 5]$ gp R: $C = \emptyset$

1.21) $D = \{3\ ; 4\} \cap (3; 4]$ gp R: $D = \{4\}$

1.22) $E = [-3; 1) \cap \mathbb{R}^-$ gp R: $E = [-3; 0)$

1.23) $F = \mathbb{N} \cup \mathbb{R}$ gp R: $F = \mathbb{R}$

1.24) $G = (-6\ ;\ 3] \cup (3; 5]$ gp R: $G = (-6; 5]$

1.25) $H = [-4; 1) \cup \mathbb{R}^-$ gp R: $H = (-\infty\ ; 1)$

1.26) $I = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$ gp R: $I = \mathbb{R} - \{0\}$

1.27) Sean los conjuntos: gp

$M = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x \geq 2\}$
$P = \{x \in \mathbb{R}\ / -3 < x \leq 5\}$

a) Expresarlos en notación de intervalo
b) Hallar M ∩ P
c) M ∪ P
d) P ∪ { 10 ; 12 }
e) P ∩ $\mathbb{R}^-$
f) $\mathbb{Z}$ ∪ P
g) $\mathbb{Z}$ ∩ M
h) $\bar{P}$

R:

a) M = $[2; +\infty)$ P = $(-3; 5]$
b) $[2; 5]$
c) $(-3\ ; +\infty)$
d) $(-3; 5] \cup \{10\ ; 12\}$
e) $(-3\ ; 0)$
f) {-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 }
g) { 2 ; 3 ; 4 ; 5 … }
h) $(-\infty\ ;\ 3] \cup (5\ ; +\infty)$

1.3 Aritmética básica

1.3.1 Jerarquía de operaciones

Aritmética es hacer **operaciones con números**, suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación. Fracciones. Denominador común. Salvo indicación en contrario, nosotros nos manejaremos dentro del conjunto de los números reales. Para las operaciones, hay una **jerarquía de operaciones**, que obliga a hacer y terminar las operaciones de cada nivel en orden, resolviendo primero las jerarquías superiores, terminado un nivel, se resuelven las operaciones del nivel inmediatamente inferior, y así sucesivamente, hasta completar el último nivel inferior.

Nivel 1 → Potenciación y radicación
Nivel 2 → Multiplicación y división
Nivel 3 → Sumas y restas

Se respetan estas jerarquías de la manera indicada, salvo que haya operaciones agrupadas por símbolos de agrupación. De haberlas, se resuelve primero lo agrupado. Los **símbolos de agrupación** de operaciones son los siguientes:

1. Paréntesis ( )
2. Corchetes [ ]
3. Llaves { }

Ej N°25: Resolver la expresión 5 – 2 + 1 + 6 – 3

Son todas sumas y restas en la misma jerarquía (nivel 3), entonces se puede sumar una a continuación de la otra, de izquierda a derecha, tomando de a dos, porque la suma es una "operación binaria" (para sumar hacen falta dos números).

Hagámoslo:

5 – 2 + 1 + 6 – 3	5 – 2 = 3 quedando:	= 3 + 1 + 6 – 3
	3 + 1 = 4 quedando:	= 4 + 6 – 3
	4 + 6 = 10 quedando:	= 10 – 3
	10 – 3 = 7 ✓	

También podemos asociar sumas y/o restas, eso quiere decir que podemos hacer operaciones (siempre de a dos) en otro orden, asociando números que no están juntos para resolver más fácil, por ejemplo:

5 – 2 + 1 + 6 – 3	5 – 2 = 3 quedando:	= 3 + 1 + 6 – 3
	Queda un 3 al principio, y otro 3 al final, podemos asociarlos y sumarlos, para que quede más fácil:	
		= 3 – 3 + 1 + 6
	3 – 3 = 0 quedando	= 1 + 6 = 7 ✓

Ej N°26: Resolver la expresión 5 . 4 + 2 / 5 – 7

Por jerarquía de operaciones, multiplicación y división se hacen primero, recién después de tenerlas resueltas, se hace el resto:

Multiplicación: 5 . 4 = 20

División: 2 / 5 = 0,4

Usando los resultados anteriores, se hacen después las sumas y restas (jerarquía inferior):

20 + 0,4 – 7 = 13,4 ✓

Ej N°27: Resolver la expresión 5 . (4 + 2) / 5 – 7

Según la jerarquía, se resuelve primero lo que está entre paréntesis:

4 + 2 = 6

Volviendo a la expresión, queda:

5 . 6 / 5 – 7

Multiplicación y división tienen la misma jerarquía, por lo tanto puede hacerse primero una o la otra, en cualquiera de los dos casos se resuelven ambas antes de restarle el 7:

5 . 6 / 5 = 6

6 – 7 = – 1 ✓

Ej N°28: Resolver la expresión $\frac{48-13}{13}$

Es frecuente *inventar* la siguiente simplificación mal hecha: $\frac{48-\cancel{13}}{\cancel{13}}$

Es decir… directamente "tachar" el 13 (muy mal). No inventes matemática. Mejor, estudiar (y ahorra tiempo). No se puede simplificar el 13 porque no estamos respetando la jerarquía de operaciones. La "raya" de división indica que se está dividiendo la resta 48 – 13, toda, no el 13 solamente. La expresión anterior equivale a escribir: (48 – 13) / 13 por lo cual primero hay que resolver la resta entre paréntesis (o el "símbolo de división grande"), luego, recién después, lo demás.

$$\frac{48\ -13}{13}=\frac{35}{13}\ ✓$$

Ej N°29: Resolver la expresión 3 [-1 + 2 / (7 – 5)] + 4

Según lo dicho más arriba, se resuelve primero lo que está entre paréntesis:

7 – 5 = 2

Colocando el resultado en la expresión, queda: 3 [-1 + 2 / 2] + 4

Se resuelve según la jerarquía, primero la división: 2 / 2 = 1

Volviendo a la expresión con ese resultado: 3 [-1 + 1] + 4

Ahora se resuelve primero lo que está entre corchetes: -1 + 1 = 0

Quedando: 3 . 0 + 4 = 4 ✓

1.3.2 Suma, resta, multiplicación y división de números racionales

a) MULTIPLICACIÓN DE RACIONALES

La multiplicación de dos números racionales, da como resultado otro racional, que tiene como numerador al producto de los numeradores, y como denominador, al producto de los denominadores.

$$\frac{a}{b}\ \frac{c}{d}=\frac{a\ .c}{b\ .d}$$

Ej N°30:

$$\frac{7}{5}\ \frac{8}{9}=\frac{7\ .8}{5\ .9}=\frac{56}{45}$$

b) DIVISIÓN DE RACIONALES

La división de dos racionales se simboliza de la siguiente manera:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \;/\; \frac{c}{d}$$

La operación da como resultado otro racional, que tiene como numerador al producto del numerador del dividendo con el denominador del divisor, y como denominador, al producto del denominador del dividendo con el numerador del divisor.

$$\frac{a\,.\,d}{b\,.\,c}$$

Una forma alternativa es *convertir la división en un producto*, la idea es multiplicar el racional del dividendo, por el divisor invertido:

$$\frac{a}{b}\;\frac{d}{c}$$

Ej N°31:

$$\frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{5}} = \frac{7\,.\,5}{8\,.\,3} = \frac{35}{24}$$

Ej N°32:

$$\frac{\frac{10}{4}}{\frac{8}{5}} = \frac{10\,.\,5}{4\,.\,8}$$

Llegado este punto, podemos hacer una operación conveniente, que es factorear cada número posible, en este caso 10 = 2 . 5 ; 8 = 2 . 4 ; 4 = 2 . 2:

$$\frac{10\,.\,5}{4\,.\,8} = \frac{2\,.\,5\,.\,5}{2\,.\,2\,.\,8} = \frac{2}{2}\;\frac{25}{16} = \frac{25}{16}$$

c) SUMA / RESTA DE RACIONALES

Sólo se pueden sumar (o restar) dos números racionales, cuando estos tienen el mismo denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Ej N°33:

$$\frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{2+7}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{3+8}{5} = \frac{11}{5}$$

De no tenerlo, no se puede, el truco es “fabricar” un **denominador común**, que será el m.c.m. Para fabricarlo, se dan los tres casos siguientes:

CASO I: cuando un denominador es múltiplo del otro.

Ej N°34:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

En este ejemplo 4 es múltiplo de 2. Mediante alguna operación válida, hay que “fabricar” un 4 en el primer número racional. Se hace multiplicando el denominador por 2, pero multiplicar por un número distinto del elemento neutro de la multiplicación (1) sería alterar la expresión, por lo tanto si multiplicamos el denominador, también lo hacemos con el numerador, de manera de multiplicar por 1, que es lo único que podemos hacer sin alterar la expresión:

$$\frac{1}{2} . \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}} + \frac{3}{4}$$

Aplicando la multiplicación de racionales y sumando (ahora se puede):

$$\frac{1\,.\,2}{2\,.\,2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

CASO II: cuando los denominadores son coprimos.

Ej N°35:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{7}$$

En este ejemplo 3 y 7 son coprimos. No hay otra alternativa para “fabricar” un denominador común, que multiplicar los coprimos entre sí (3 . 7 = 21):

$$\frac{1}{3} . \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{7}} + \frac{2}{7} . \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}}$$

Aplicando la multiplicación de racionales y sumando (ahora se puede):

$$\frac{1\,.\,7}{3\,.\,7} + \frac{2\,.\,3}{7\,.\,3} = \frac{7}{21} + \frac{6}{21} = \frac{13}{21}$$

CASO III: cuando los denominadores no son ni múltiplos, ni coprimos.

Ej N°36:

$$\frac{1}{10} + \frac{6}{15}$$

En este ejemplo (denominadores 10 y 15) ni uno es múltiplo del otro, ni son coprimos.

El método es encontrar el m.c.m. de ambos, en este caso es el 30.

$$\frac{1}{10}+\frac{6}{15}=\frac{1}{10}\,\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}}+\frac{6}{15}\,\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}}=\frac{3}{30}+\frac{12}{30}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$$

ACTIVIDAD: hallar el resultado exacto de las siguientes expresiones aritméticas; hacerlo **sin usar calculadora**, 100% a mano, respetando la jerarquía de operaciones explicada más arriba (1.3.1), y evitando hacer "cálculos auxiliares".

1.28)	a) 8 – 3 + 6 – 7 – 4 – 9	gp	R: -9
	b) 8 – { 3 + [6 – (7 – 4) – 9] }	gp	R: 11
	c) 8 – 3 + [6 – 7 – (4 – 9)]	gp	R: 9
	d) [8 – (3 + 6) – 7] – 4 – 9	gp	R: -21
1.29)	a) 2 . 3 + 4 / 5 – 6 + 1	gp	R: 9/5
	b) 2 . (3 + 4) / 5 – 6 + 1	gp	R: –11/5
	c) 2 [3 + 4 / (5 – 6)] + 1	gp	R: -1
	d) 2 [(3 + 4) / (5 – 6)] + 1	gp	R: –13
1.30)	a) 9 . 7 + 4 – 6 / 2	gp	R: 64
	b) 9 (7 + 4) – 6 / 2	gp	R: 96
	c) 9 (7 + 4 – 6) / 2	gp	R: 45/2
	d) 9 [(7 + 4 – 6) / 2]	gp	R: 45/2

1.3.3 Resolver divisiones enteras

Una división se llama entera cuando se dividen dos números enteros mediante:

$$D = d\,q + r$$

D : dividendo   d : divisor   q : cociente   r : resto

Ej N°37:   dividir 57/6 en forma entera

57	6	57: dividendo	6: divisor
3	9	9: cociente	3: resto

Y entonces podemos escribir: 57 = 6 . 9 + 3

1.31) Realizar las siguientes divisiones enteras y expresar el dividendo en función del cociente, divisor, y resto:

a) $\frac{137}{4}$ gp   R: 137 = 4 . 34 + 1

b) $\frac{272}{3}$ gp R: 272 = 3 . 90 + 2

c) $\frac{733}{5}$ gp R: 733 = 5 . 146 + 3

d) $\frac{894}{6}$ gp R: 894 = 6 . 149

e) $\frac{958}{7}$ gp R: 960 = 7 . 136 + 6

1.3.4 Resolver expresiones fraccionarias

1.32) a) $\frac{73-21}{21}$ gp R: 52/21

b) $73-\frac{21}{21}$ gp R: 72

c) $\frac{73}{21}-21$ gp R: –368/21

d) $\frac{5+11-20}{5}$ gp R: –4/5

1.33) a) (5 + 11 – 20) / 5 gp R: –4/5

b) $\frac{5}{5}+11-20$ gp R: -8

c) $5+\frac{11}{5}-20$ gp R: –64/5

d) $5+\frac{11-20}{5}$ gp R: 16/5

1.34) $6\left(\frac{6}{4}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)$ gp R: $\frac{23}{4}$

1.35) $2\left(-\frac{6}{7}\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)$ gp R: 1

1.36) $\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}$ gp R: $\frac{7}{9}$

1.37) $\frac{1}{7}\,/\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$ gp R: $\frac{15}{14}$

1.38) $2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$ gp R: $\frac{47}{17}$

1.39) $$1-\cfrac{2}{4+\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{6}}}$$ gp R: $\frac{32}{61}$

1.3.5 Módulo o valor absoluto

El módulo o valor absoluto de un número, es la “cantidad pura” sin el signo del número, lo podemos pensar como la operación que “le quita el signo”.

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Ej N°39: | -3 | = 3 | 2 | = 2 | 0 | = 0

Y también podremos, más adelante, solucionar ecuaciones con módulo (por ejemplo la ecuación | x +5 | = 1), lo que veremos con más detalle en el capítulo sobre ecuaciones (4.7), y en inecuaciones con módulo (5.3 y 5.4).

1.3.6 Potenciación y radicación

Propiedades de la potenciación (multiplicar) y la radicación (recuperar la base):

1) a^n = a . a . a ... a (multiplicar a por sí mismo n veces)

2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

3) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

4) $(a^x)^y = a^{x\,y}$

5) $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

6) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

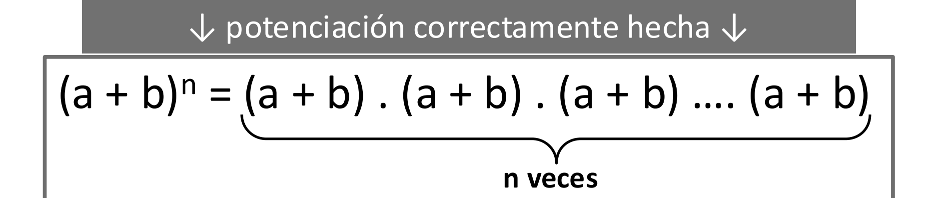
para n impar : 7a) $\sqrt[n]{a^n} = a$

para n par : 7b) $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Sólo se puede hacer lo que está indicado en las propiedades (1 a 7), o sea:

$(a + b)^n = a^n + b^n$
$(a - b)^n = a^n - b^n$

MAL, no se puede distribuír el exponente en una suma (ni resta), potenciación es multiplicar por sí mismo n veces, o sea:



Ej N°40: 2^3 = 2 . 2 . 2 = 8 5^4 = 5 . 5 . 5 . 5 = 625

$(-3)^3$ = (-3) . (-3) . (-3) = -27 $(-4)^2$ = (-4) . (-4) = 16

Ej N°41: $2^3 \cdot 2^6 = 2^{(3+6)} = 2^9$ $5^4 \cdot 5 = 5^{(4+1)} = 5^5$ = 3.125

$(-3)^3 \cdot (-3)^4 = (-3)^{(3+4)} = (-3)^7$ = -2.187

ACTIVIDAD: simplificar usando propiedades de potenciación y radicación.

1.40) $\dfrac{(-14)\,.\,15\,.\,60\,.\,2}{35\,.\,32\,.\,12\,.\,5}$ gp R: $-\dfrac{3}{8}$

1.41) $-7\sqrt{2}+6\sqrt{8}-3\sqrt{2}-\dfrac{1}{3}\sqrt{18}$ gp R: $\sqrt{2}$

1.42) $3\sqrt[3]{343}-\sqrt[3]{64}+\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{729}$ gp R: $\dfrac{43}{2}$

1.43) $\left(\sqrt{\dfrac{5}{3-\sqrt{5}}}\ .\ \sqrt{\dfrac{5}{3+\sqrt{5}}}\right)^{-2}$ gp R: $\dfrac{4}{25}$

1.44) $25\ \dfrac{3-5^{-2}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{3}\ 9^{2/3}}{9}\ 3^{-5/6}-5\sqrt{25^{-1}}$ gp R: $37\sqrt{2}$

1.45) $\dfrac{1}{22}\ \dfrac{\frac{27}{60}+\sqrt{36^{-1}}\left(-\frac{2^{-1}}{4^{-1}}+\frac{5^{-1}}{2^{-1}}\right)}{3^{-1}\ .\ 4^{-1}\ .\ 15^{-1}}$ gp R: $\dfrac{3}{2}$

1.46) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{3-\dfrac{5}{3}}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{3}\right)^{-2}}\ \sqrt{\frac{3}{2}-2^{-1}}$ gp R: $-\dfrac{5}{12}$

1.47) $\dfrac{81^{0,25}+9^{-0,5}}{(-27)^{1/3}+(-8)^{2/3}}$ LT-TP2-25.10 R: $\dfrac{10}{3}$

1.48) $\dfrac{\sqrt[4]{16}+\sqrt[4]{81}}{\sqrt[3]{2^{6}}+5\,.\,5^{-1}}$ gp R: 1

1.4 Expresión entera/fraccionaria y racional de un número

Un número puede expresarse como parte entera, coma, y parte fraccionaria, ejemplo:

7496,251		
PARTE ENTERA	SEPARACIÓN (COMA)	PARTE FRACCIONARIA
7496	,	251

Y también, siempre que sea un número racional, podrá expresarse como un cociente.

La parte entera son potencias naturales (y cero) de 10, multiplicadas por una cifra (en este caso 7496); y la parte fraccionaria son potencias negativas de 10, también multiplicadas por una cifra (en este caso 0,251):

Ej N°42: $7496{,}251 = 7\,.\,10^{3} + 4\,.\,10^{2} + 9\,.\,10^{1} + 6\,.\,10^{0} + 2\,.\,10^{-1} + 5\,.\,10^{-2} + 1\,.\,10^{-3}$

= 7000 + 400 + 90 + 6 + 0,2 + 0,05 + 0,001

Al poder sumarse todo, y teniendo separada la parte entera de la fraccionaria, podemos escribir:

7496,251 = 7496 + 0,251

Y hemos llegado al planteo que vamos a resolver, es decir, escribir la parte fraccionaria a derecha de la coma, como un número racional.

$0,2 = 2 \,.\, 10^{-1} = 2/10 = 2000 / 1000$

$0,05 = 5 \,.\, 10^{-2} = 5/100 = 500 / 1000$

$0,001 = 1 \,.\, 10^{-3} = 1/1000$

Con lo cual: 0,251 = 251/1000 y entonces:

7496,251 = 7496 + 251/1000 = 7496251/1000 expresión racional

Ej N°43: 180,36 = 180 + 36/100

Ej N°44: 0,941 = 941/1000

La regla práctica es entonces, 1) separar parte entera de parte fraccionaria (y sumarlas), 2) tomar la expresión fraccionaria como numerador (sin coma) y colocarle como denominador un uno con tantos ceros como cifras fraccionarias tiene (o 10 elevado a la potencia "cantidad de cifras fraccionarias").

Ej N°45: 500,3 = 500 + 3/10

Hemos visto que los **números periódicos son racionales**, por ello tienen que poder ser expresados como tales. Aplicaremos directamente el **método para expresar los periódicos en la forma racional**, sin mayor explicación, pues excede el ámbito de este trabajo (corresponde a análisis matemático). Consiste en tomar las cifras periódicas, todas ellas, y trasladarlas para que queden justo a la derecha de la coma, escribirlas en el numerador, y colocar como denominador, tantos 9 como la cantidad de cifras.

CASO I: números con una sola cifra periódica.

Ej N°46: aplicando el método:

a) $0,\hat{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

b) $2,\hat{5} = 2{,}555 \ldots = 2 + \frac{5}{9} = \frac{18+5}{9} = \frac{23}{9}$

c) $6{,}0\hat{7} = 6{,}0777 \ldots = 6 + 0{,}0\hat{7} = 6 + \frac{10}{10} \,.\, 0{,}0\hat{7} = 6 + \frac{1}{10} .\left(10 \,.\, 0{,}0\hat{7}\right) = 6 + \frac{1}{10} \,.\, 0,\hat{7}$

$= 6 + \frac{1}{10} \,.\, \frac{7}{9} = 6 \,.\, \frac{90}{90} + \frac{7}{90} = \frac{540}{90} + \frac{7}{90} = \frac{547}{90}$

d) $22{,}10\hat{4} = 22{,}10444 \ldots = 22{,}1 + 0{,}00\hat{4} = 22{,}1 + \frac{100}{100} \,.\, 0{,}00\hat{4}$

$$= 22{,}1 + \frac{1}{100}.\left(100\ .0{,}00\hat{4}\right) = 22{,}1 + \frac{1}{100}.0,\hat{4}$$

$$= 22{,}1 + \frac{1}{100}.\frac{4}{9} = 22{,}1 + \frac{1}{225} = \frac{221}{10} + \frac{1}{225} = \frac{221\ .45 + 2}{450} = \frac{9947}{450}$$

<u>CASO II</u>: números con dos cifras periódicas.

<u>Ej N°47</u>: aplicando el método:

a) $0,\widehat{75} = \frac{75}{99}$

b) $2{,}6\widehat{34} = 2{,}6 + 0{,}0\widehat{34} = 2{,}6 + \frac{10}{10}\ 0{,}0\widehat{34} = 2{,}6 + \frac{1}{10}\ .\left(10\ .0{,}0\widehat{34}\right) =$

$$= 2{,}6 + \frac{1}{10}\ .0,\widehat{34} = 2{,}6 + \frac{1}{10}\ .\frac{34}{99} = \frac{26}{10} + \frac{17}{495} = \frac{2574 + 34}{990} = \frac{2608}{990} = \frac{1304}{495}$$

c) $1{,}11\widehat{27} = 1{,}11 + 0{,}00\widehat{27} = 1{,}11 + \frac{100}{100}\ 0{,}00\widehat{27} = 1{,}11 + \frac{1}{100}.(100\ .\ 0{,}00\widehat{27})$

$$= 1{,}11 + \frac{1}{100}.0,\widehat{27} = 1{,}11 + \frac{1}{100}.\frac{27}{99} = \frac{111}{100} + \frac{1}{100}\ .\ \frac{3}{11} = \frac{111\ .11 + 3}{1100}$$

$$= \frac{1221 + 3}{1100} = \frac{1224}{1100} = \frac{306}{275}$$

Y si tuviera n cifras periódicas, se aplica la misma técnica, extendiéndola a las n cifras.

<u>ACTIVIDAD</u>: convertir a mano los siguientes números periódicos a su expresión racional, logrando el resultado indicado y siguiendo pasos válidos.

1.49)	$0,\overline{35}$	gp	R: $\frac{35}{99}$
1.50)	$1,\overline{54}$	gp	R: $\frac{139}{90}$
1.51)	$2{,}5\overline{72}$	gp	R: $\frac{283}{110}$
1.52)	$0{,}54\bar{6}$	gp	R: $\frac{41}{75}$

1.5 Expresiones algebraicas

Una **expresión algebraica** es toda expresión que tiene **letras** (que representan variables, coeficientes o incógnitas) y **números**, que se relacionan entre sí por **operaciones** matemáticas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación). Es esencial saber sobre las expresiones algebraicas que:

LAS ÚNICAS OPERACIONES VÁLIDAS PERMITIDAS CON LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS, SON LAS OPERACIONES CON EL ELEMENTO NEUTRO:	-SUMAR CERO -RESTAR CERO -MULTIPLICAR POR UNO -DIVIDIR POR UNO

Es la única manera de generar expresiones equivalentes (una expresión equivalente es aquella que genera los mismos números). Ninguna otra cosa se puede hacer con una expresión algebraica.

Ej N°48: supongamos tener la expresión algebraica: $\sqrt{x+3}$

No podemos elevarla al cuadrado, para que "desaparezca la raíz", porque nos quedaría (x+3), y eso equivale a *borrarle la raíz*. Y no es lo mismo con raíz, que sin raíz. Sólo está permitido hacerle operaciones que generen expresiones equivalentes. Si queremos elevar la expresión a alguna potencia, sólo puede ser la primera potencia, para que la expresión sea equivalente. Tampoco podemos restarle 3 al radicando, sólo podemos restarle el elemento neutro de la resta, o sea sólo podemos restarle cero.

¿Podemos sumarle 2 a la expresión? No, porque la expresión $\sqrt{x+3}+2$ que nos queda, no es equivalente. Sólo podemos sumarle el elemento neutro de la suma, es decir sólo podemos sumarle cero.

¿Podemos dividir la expresión por 5? No, porque la estaríamos alterando. Sólo podemos dividir por el elemento neutro de la división, o sea dividir por uno.

¿Podemos multiplicarla por algún número? Sí, podemos multiplicarla solamente por el elemento neutro de la multiplicación, o sea por uno.

Ej N°49: hacerle operaciones válidas a la expresión algebraica $3\ x^2$

Como está dicho arriba, pueden hacerse operaciones sólo con el elemento neutro:

Operación:	Sólo es válido:	$3\ x^2$
Suma	Sumar cero	$3\ x^2$ **+ 0**
Resta	Restar cero	$3\ x^2$ **– 0**
Multiplicación	Multiplicar por uno	$3\ x^2$ **. 1**
División	Dividir por uno	$3\ x^2$ **/ 1**

Si por algún motivo necesitásemos dividir por 4, no se puede hacer eso, salvo que también multipliquemos por 4:

$$3\ x^2 = 3\ x^2\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{4}}$$

Supongamos que necesitamos "fabricarle" un 5 sumando. No se puede sumar 5, salvo que también restemos el mismo número (o sea sumar cero):

$$3\ x^2 = 3\ x^2 + \mathbf{5} - \mathbf{5}$$

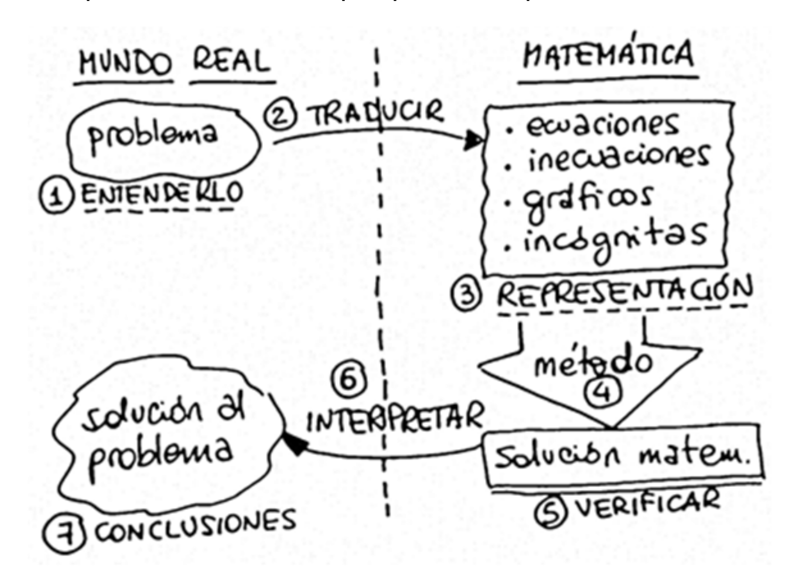
Ej N°50: supongamos tener la expresión algebraica $\frac{a}{\sqrt{a}}$ de la que queremos que quede

sin la raíz cuadrada en el denominador (lo que veremos más adelante se llama "racionalizar"). Por supuesto, dividir la expresión por $\sqrt{a}$, haría que quede "a" en el denominador. Pero esa operación no puede hacerse, porque, como vimos, sólo puede dividirse por uno. Multiplicamos y dividimos entonces por la raíz (o sea uno):

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{a}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{a}}} = \frac{a\,\sqrt{a}}{a} = \sqrt{a}$$

1.5.1 La importancia de traducir un problema a la sintaxis matemática

Lo primero es *comprender* el problema del mundo real (1), luego este se *traduce* (2) al mundo matemático, esto se hace usando ecuaciones, inecuaciones, tablas, gráficos, imágenes, incógnitas. Para poder realizar ambos pasos 1 y 2, primero hay que estudiar. Una vez que tenemos *representado* el problema (3) en el mundo matemático, lo *resolvemos* usando algún *método de resolución* (4), eso puede ser un único método o varios métodos, combinados. Si se puede (a veces no se puede), verificamos el resultado obtenido (5), para finalmente *interpretar* (6) el resultado matemático, y dar la solución requerida en el mundo físico. Es muy bueno también sacar conclusiones de lo que hemos hecho, qué hemos aprendido al resolver este problema (7), y con qué mirada nos pararemos ante otro problema similar que pudiera aparecer.



<u>ACTIVIDAD</u>: *Traducir* (punto 2) textos a su *representación* algebraica (punto 3):

1.53) El cuadrado de un número, aumentado en dos

R: $x^2 + 2$ LT-TP1-1c

1.54) El cuadrado de un número aumentado en dos, es mayor que cinco

R: $(x + 2)^2 > 5$ gp

1.55) La mitad de un número aumentada en tres

R: x/2 + 3 gp

1.56) La mitad de diez, es negativa

R: 10/2 < 0 , es falso gp

1.57) En una división, el divisor es "d", el cociente es "q", y el resto es "r"

R: $D = d\, q + r$ LT-TP1-1k

1.58) La cifra de las centenas de un número es c, la cifra de las decenas es d, y la de las unidades es u. La cifra de las unidades es distinta a la de las centenas.

R: $N = 100\, c + 10\, d + u \qquad u \neq c$ LT-TP1-1º

1.59) El triple de un número es igual al número aumentado en ocho

R: $3\, x = x + 8$ LT-TP1-1

1.60) Juan y Antonio tienen conjuntamente $50. Antonio tiene $12 más que Juan.

R: $j + a = \$\, 50 \qquad a = \$\, 12 + j$ LT-TP1-2

1.61) La edad de un padre, es el cuádruple de la de su hijo. Dentro de cinco años, su edad será el triple de la de su hijo.

R: $p = 4\, h \qquad p + 5 = 3\, (h + 5)$ LT-TP1-7

1.62) Un terreno rectangular tiene 40 m más de largo que de ancho. Si tuviese 20 m menos de largo, y 10 m más de ancho, su área sería la misma.

R: $l = 40\, m + a \qquad l\, a = (l - 20\, m)(a + 10\, m)$ LT-TP1-8

1.63) Dividir un ángulo de 60° en dos partes cuyas medidas estén en la razón 5:7

R: $\alpha + \beta = 60° \qquad \alpha = 5\, u \qquad \beta = 7\, u$ LT-TP1-10

1.64) En un número de dos cifras, la cifra de las decenas excede en 5 a la cifra de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras, resulta un nuevo número que sumado al anterior, da 121.

R: $N = 10\, d + u \qquad d = 5 + u \qquad M = 10\, u + d \qquad N + M = 121$ LT-TP1-11

1.65) La entrada de un cine cuesta $10 para los mayores, y $6 para los menores. Una noche, entraron 320 personas a ver la película, y pagaron un total de $2720. También se sabe que entraron menos menores que mayores.

R: $M\, \$10 + m\, \$6 = \$2720 \qquad M + m = 320 \qquad m < M$ LT-TP1-12

1.66) Agustín empieza un juego y gana $10. Después, duplica su dinero, pierde $25, y queda igual que al principio.

R: $(D + 10)\, 2 - 25 = D$ LT-TP1-14

1.67) Perímetro de un triángulo: gp

a) Escaleno b) Isósceles R: a) p = a + b + c b) p = a + 2 b

1.68) El cateto mayor de un triángulo rectángulo, es el doble del cateto menor.

R: $5\,c^2 = h^2$ gp

1.5.2 Simplificar expresiones algebraicas

Simplificar una expresión algebraica, es hacerle **operaciones válidas** a dicha expresión, a fin de llegar a la *expresión equivalente* lo más *sintética e irreductible posible*, tanto en números como en letras, recordando que operaciones válidas son las que generan expresiones equivalentes, es decir, a una expresión algebraica sólo podemos sumarle cero, restarle cero, multiplicarla por uno, dividirla por uno, hacer un denominador común (o separar el denominador común), transformar potencias negativas en positivas, factorear, siempre obteniendo expresiones equivalentes.

Ej N°51: simplificar la expresión algebraica siguiente: $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}}$

Haciendo denominador común del numerador: $\dfrac{\frac{y+x}{\boldsymbol{x\,y}}}{\frac{x}{y}}$

Transformando cociente en producto: $\dfrac{y+x}{x\,y}\ \dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}$

Haciendo la cuenta y/y=1: $\dfrac{y+x}{x}\ \dfrac{\mathbf{1}}{x}$

Multiplicando y finalizando: $\dfrac{y+x}{x^2}$

ACTIVIDAD: Simplificar las siguientes expresiones algebraicas:

1.69) $\dfrac{10^{x+y}\ 10^{y-x}\ 10^{y+1}}{10^{y+1}\ 10^{2y+1}}$ LT-TP2-25.6 R: $\dfrac{1}{10} = 0{,}1$

1.70) $(a^{-1}-b^{-1})^{-1}\ (a^{-1}+b^{-1})^{-1}$ LT-TP2-25.7 R: $\dfrac{a^2\ b^2}{b^2-a^2}$

1.71) $\dfrac{x^{-2}\ -\ y^{-2}}{x^{-1}\ +\ y^{-1}}$ LPE-202 R: $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$

1.72) $\dfrac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)}\ -\ \dfrac{1-x}{2+x}}{h}$ LPE-225 R: $\dfrac{-3}{(2+x+h)\,(2+x)}$

1.73) $\dfrac{\dfrac{a-b}{a}-\dfrac{a+b}{b}}{\dfrac{a-b}{b}+\dfrac{a+b}{a}}$ LPE-221 R: -1

1.74) $\dfrac{(a-1)^{-1}+1}{a^{-1}-(a-1)^{-1}}$ LPE-327 R: $-a^2$

1.75) $\dfrac{a-7+10\,a^{-1}}{2a-20+50\,a^{-1}}$ P1.T1.1410 R: $\dfrac{a-2}{2(a-5)}$

1.76) $\dfrac{a+4-21\,a^{-1}}{3a+42+147\,a^{-1}}$ P1.T2.1410 R: $\dfrac{a-3}{3(a+7)}$

1.77) $\dfrac{3\,a^3\,b^{-2}}{a^2\,b^{-1}}/\dfrac{12\,a^2\,b}{4\,b^2}$ web/gp R: $\dfrac{1}{a}$

1.78) $\dfrac{(25^b)^a}{(5^{2a})^b}$ web/gp R: 1

1.79) $\dfrac{15\,a^5\,6\,b^{-2}}{18\,a^2\,b^3}$ web/gp R: $5\,\dfrac{a^3}{b^5}$

1.80) $|x-1|+\dfrac{x}{|x|}-|x+1|$; para $x<-2$ LPE-378 R: 1

1.81) Pensar un número, multiplicarlo por 2, sumarle 33, restarle 13, dividir por 2, y volver a restar el número pensado. El resultado debe ser el número 10. Muestre que este procedimiento dará como respuesta 10 para cualquier número pensado. LT-TP2-9

1.5.3 Racionalizar expresiones algebraicas

Racionalizar es transformar la expresión en una expresión equivalente, que no tenga raíces cuadradas, por lo general esto se hace con el denominador (a veces numerador).

Ej N°52: racionalizar el denominador siguiente:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

La forma de "quitar" la raíz cuadrada del denominador, es multiplicar y dividir por la misma raíz:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ACTIVIDAD: Racionalizar el **denominador** de las siguientes expresiones algebraicas:

1.82) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ gp R: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

1.83)	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	gp	R: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
1.84)	$\dfrac{5}{\sqrt{7}+2}$	web/gp	R: $-\dfrac{10}{3}+\dfrac{5}{3}\sqrt{7}$
1.85)	$\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$	gp	R: $1+\sqrt{3}$
1.86)	$\dfrac{2}{2-\sqrt{5}}$	LT-TP2-27.1	R: $-4-2\sqrt{5}$
1.87)	$\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$	LT-TP2-27.2	R: $-5+2\sqrt{6}$
1.88)	$\dfrac{u}{\sqrt{u}-\sqrt{3}}-\dfrac{u}{\sqrt{u}+\sqrt{3}}$	tsp.niv / mod.gp	R: $\dfrac{2\,u\sqrt{3}}{u-3}$
1.89)	$\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{2-\sqrt{x}}{9-x}$	tsp.niv / mod.gp	R: $\dfrac{\sqrt{x}-4}{x-9}$
1.90)	$\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$	gp	R: $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

ACTIVIDAD: Racionalizar el **numerador** de las siguientes expresiones algebraicas:

1.91)	$\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$	LT-TP2-26.1	R: $\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$
1.92)	$\dfrac{\sqrt{u}-2}{u-4}$	LT-TP2-26.2	R: $\dfrac{1}{\sqrt{u}+2}$

1.6 Uso de Wolfram Alpha online

Van algunos ejemplos para darse una idea del uso de Wolfram Alpha (gratuito) online. Para este y para todos los restantes capítulos, todos los ejemplos están en este link.

Click en > https://textospreuni.home.blog/resueltoswolframalpha/

2. NÚMEROS Y TECNOLOGÍA

→ ESTE CAPÍTULO ES OPCIONAL ←

Gracias a un gran invento, el transistor[2], que dio lugar a la tecnología electrónica, los sistemas de información, el microprocesador y las telecomunicaciones, tanto de audio, datos y video, en la vida moderna, la infinidad de terminales de comunicaciones que usamos a diario en todas partes, desde la oficina, el hogar, la administración pública (con trámites cada vez más frecuentes a través de formularios web), motivan este capítulo, ya que absolutamente **toda la información que almacenamos, editamos y transmitimos, se representa mediante números**.

Tanta es la tecnología a mano, hoy, que ya ni siquiera existen los teléfonos públicos, lo que antes había en casi todas las veredas, y acudíamos a ellos ya sea porque era caro hablar por celular, o porque, directamente... no teníamos celular. Hoy, podemos comunicarnos a cualquier lugar del mundo, totalmente gratis, via whatsapp, telegram, discord, zoom, etc, y con la velocidad de la fibra óptica que surca todos los mares[3].

2.1 Cifras

Una **cifra** es un símbolo indivisible, que es usado para formar números, vale decir, las cifras son los *ladrillos fundamentales* con los que se construyen los números.

Conjunto de cifras del sistema de numeración decimal = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

Este conjunto también se llama *alfabeto* del sistema decimal de numeración, el que usamos cotidianamente. Se llama decimal porque su alfabeto tiene 10 símbolos, 10 caracteres indivisibles, que son del "0" al "9". También por ello se dice que **10 es la base** del sistema de numeración. Las cifras en base 2 (binario) se llaman **bit** (binary digit).

2.2 Numeración en base 10

Los números se "construyen" usando cifras. Un número es un conjunto de cifras concatenadas (unidas) que representan cantidades. Todas las cantidades posibles, se representan con números, los que a su vez están conformados por cifras.

Los números naturales empiezan con una primera cifra que se llama *cifra de unidades*, luego las decenas, después las centenas, sigue la unidad de mil, luego la de diez mil, y así sucesivamente.

En el sistema de numeración decimal se inicia la numeración de los números naturales,

[2] El transistor, un invento que cambió al mundo (aparte de la rueda, el frigorífico, la electricidad, etc). https://youtu.be/OwS9aTE2Go4

[3] Mapa mundial de las FO submarinas. Desde Argentina parten 8 fibras, siete desde Las Toninas, más una desde Santa Cruz a Tierra del Fuego. https://www.submarinecablemap.com/

de menor a mayor, colocando en primer lugar, los elementos del conjunto de las cifras en forma ascendente, hasta agotarlas todas:

Números de menor a mayor de una cifra = { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }

Una vez agotadas todas las cifras disponibles en el alfabeto de 10 símbolos, agregamos una nueva cifra "1" a izquierda (columna), y volvemos a incrementar la columna (cifra) anterior igual que antes.

	Primeros 10 números (0 al 9)	
1°		0
2°		1
3°		2
4°		3
5°		4
6°		5
7°		6
8°		7
9°		8
10°		9
	Siguientes 10 números (11 al 20)	
11°	1	0
12°	1	1
13°	1	2
14°	1	3
15°	1	4
16°	1	5
17°	1	6
18°	1	7
19°	1	8
20°	1	9

El proceso sigue indefinidamente, representando números cada vez más grandes, para representar todos los infinitos números posibles; observando las siguientes reglas:

1. La primera posición (a derecha), llamémosle posición 0 (cero), cambia contínuamente entre números consecutivos, el salto es de a uno.
2. La segunda posición (posición uno) cambia una vez por cada 10 cambios en la posición anterior (frecuencia de cambios 10 veces menor).

3. La tercera posición cambia una vez por cada 10 cambios en la segunda posición, y una vez por cada 100 cambios en la primera posición (frecuencia de cambios 10 y 100 veces menor).
4. Generalizando lo visto en (1, 2, 3), la posición o cifra n cambia una vez cada 10 cambios de la posición n-1, una vez cada 100 cambios en la posición n-2, y así sucesivamente.
5. Diciendo de otra manera la (4), podemos decir que todas las posiciones o cifras, cambian continuamente, barriendo todos los elementos del alfabeto, siendo la mayor frecuencia de cambio la de la posición 0, la segunda frecuencia 10 veces menor en la posición 1, y así sucesivamente.

Ej. N°1: mostraremos, con el número 4528, que el sistema de numeración es **posicional**, lo que significa que cada cifra tiene una contribución distinta al número, según sea su posición, y también es **pesado**, es decir que cada posición tiene un peso.

<table>
<tr><td>peso :</td><td>10^3</td><td>10^2</td><td>10^1</td><td>10^0</td><td></td></tr>
<tr><td>N =</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">posición 0 (unidades). valor = 8 . 10^0 = 8</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">posición 1 (decenas). valor = 2 . 10^1 = 20</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="4">posición 2 (centenas). valor = 5 . 10^2 = 500</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">posición 3 (unidad de mil). valor = 4 . 10^3 = 4000</td></tr>
<tr><td colspan="6">El número completo es la suma N = 4000 + 500 + 20 + 8 = 4528</td></tr>
</table>

Lo que, en general, queda expresado como la suma de potencias siguiente:

$$\mathbf{N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0}$$

Ej. N°2: el número **749** tiene tres cifras, "7" es la cifra de las centenas, "4" es la cifra de las decenas, y "9" la de las unidades, es decir: 749 = 7 . 10^2 + 4 . 10^1 + 9 . 10^0.

Ej. N°3: el número **3** tiene una sola cifra, el "3" (unidades).

Ej. N°4: el número **1.374.685** está compuesto por 7 cifras, y se lee "un millón, trescientos setenta y cuatro mil, seiscientos ochenta y cinco". Sus cifras son: "5" de las unidades, "8" las decenas, "6" las centenas, "4" la unidad de mil, "7" la unidad de decenas mil, "3" la unidad de centenas de mil, "1" la unidad de millón.

Si agregamos la parte fraccionaria, es lo mismo pero con potencias negativas:

$$\mathbf{N = Parte\ entera + parte\ fraccionaria\ (a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + a_{-3} \cdot 10^{-3} + \ldots)}$$

Ej. N°5: el número 293,74 expresado en potencias de 10 es:

$$N = 200 + 90 + 3 + 0{,}7 + 0{,}04 = 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$$

En donde también vemos que cada cifra tiene un peso distinto según la posición que ocupa, y si la cambiamos de lugar, eso significa multiplicar / dividir por 10.

Ej. N°6: si al número 293,74 lo multiplicamos o dividimos por 10 (la base):

$$293{,}74 \;.\; 10 = (2 \;.\; 10^2 + 9 \;.\; 10^1 + 3 \;.\; 10^0 + 7 \;.\; 10^{-1} + 4 \;.\; 10^{-2}) \;.\; 10$$

$$= 2 \;.\; 10^3 + 9 \;.\; 10^2 + 3 \;.\; 10^1 + 7 \;.\; 10^0 + 4 \;.\; 10^{-1} = 2937{,}4$$

$$293{,}74 \;/\; 10 = (2 \;.\; 10^2 + 9 \;.\; 10^1 + 3 \;.\; 10^0 + 7 \;.\; 10^{-1} + 4 \;.\; 10^{-2}) \;/\; 10$$

$$= 2 \;.\; 10^1 + 9 \;.\; 10^0 + 3 \;.\; 10^{-1} + 7 \;.\; 10^{-2} + 4 \;.\; 10^{-3} = 29{,}374$$

De lo cual podemos afirmar la tan conocida regla:

1) MULTIPLICAR UN NÚMERO POR SU BASE, EQUIVALE A CORRER LA COMA UN LUGAR HACIA LA DERECHA.
2) DIVIDIR UN NÚMERO POR SU BASE, EQUIVALE A CORRER LA COMA UN LUGAR HACIA LA IZQUIERDA.

Ej. N°7: si al número 453 lo multiplicamos por 10 (la base) según la regla mencionada, se corre la coma un lugar a la derecha: 453 . 10 = 4530

Ej. N°8: si al número 453 lo dividimos por 10 (la base) según la regla mencionada, se corre la coma un lugar a la izquierda: 453 / 10 = 45,3

2.3 Numeración en distintas bases

En general, para un sistema de numeración genérico base “b”:

peso :	b^n	...	b^3	b^2	b^1	b^0	b^{-1}	b^{-2}	...
N =	a_n	...	a_3	a_2	a_1	a_0	a_{-1}	a_{-2}	...

$$N = a_n \;.\; b^n + a_{n-1} \;.\; b^{n-1} + a_{n-2} \;.\; b^{n-2} + \ldots + a_1 \;.\; b^1 + a_0 \;.\; b^0 + a_{-1} \;.\; b^{-1} + + a_{-2} \;.\; b^{-2} + \ldots$$

Las bases (b) más usadas son:

b	Sistema de numeración	Alfabeto (con que se construyen los números)
2	Binario	{ 0 ; 1 }
8	Octal	{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 }
10	Decimal	{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 }
16	Hexadecimal	{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; C ; D ; E ; F}

Algunos números en ellas son:

decimal	binario	octal	hexadecimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

Ej. N°9: si al número 1001_2 lo multiplicamos por 10_2 (la base en binario) según la regla mencionada, se corre la coma un lugar a la derecha: $101_2 . 10_2 = 1010_2$

Ej. N°10: si al número 13_8 lo dividimos por 10_8 (la base en octal) según la regla mencionada, se corre la coma un lugar a la izquierda: $13_8 / 10_8 = 1,3_8$

2.4 Conversión de decimal a otras bases

Si al número 4528 lo desglosamos en divisiones enteras sucesivas usando como divisor "d" al número 10 (la base):

PRIMERA DIVISIÓN: $4528 = 452 . 10 + 8 \rightarrow D_1 = q_1 . d + r_1$

Al hacer esto, hemos obtenido un resto $r_1 = 8$, que es la primera cifra del número. Si al cociente lo volvemos a dividir por la base (10) en una segunda división entera:

SEGUNDA DIVISIÓN: $452 = 45 . 10 + 2 \rightarrow D_2 = q_2 . d + r_2$

Hemos obtenido $r_2 = 2$ que es la siguiente cifra, y podemos reescribir el número:

$4528 = (45 . 10 + 2) . 10 + 8$

$N = (q_2 . d + r_2) d + r_1$

TERCERA DIVISIÓN: $45 = 4 . 10 + 5$ → $D_3 = q_3 . d + r_3$

Con lo que hemos obtenido $r_3 = 5$ que es la siguiente cifra, y podemos reescribir:

$4528 = ((4 . 10 + 5) . 10 + 2) . 10 + 8$

$N = ((q_3 . d + r_3) . d + r_2) d + r_1$

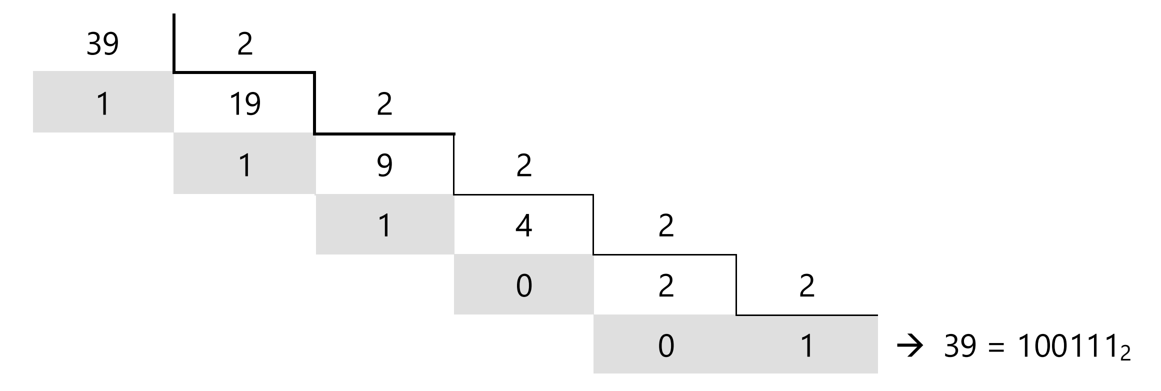
Y nos queda separada también la cuarta cifra (4). Por lo tanto podemos reemplazar:

$q_3 = a_3$; $r_3 = a_2$; $r_2 = a_1$; $r_1 = a_0$; $d = b$

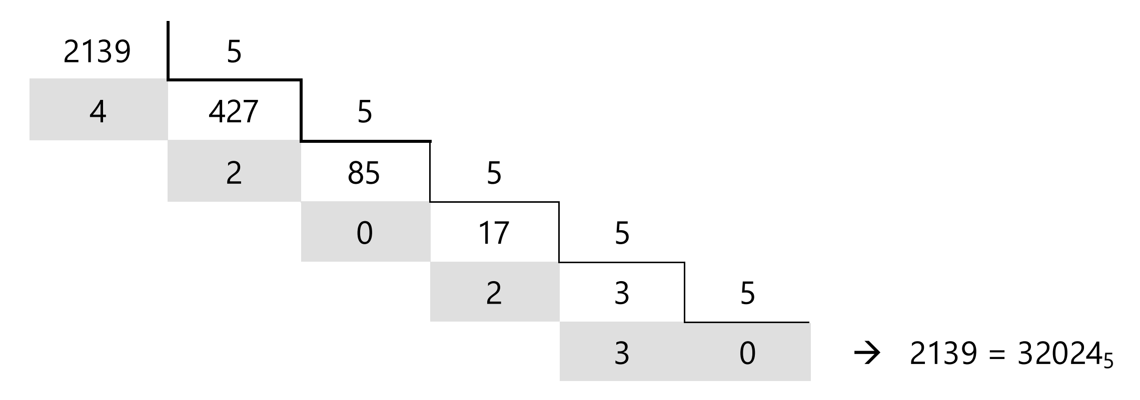
$$\mathbf{N = ((a_3 . b + a_2) . b + a_1) b + a_0 = a_3 . b^3 + a_2 . b^2 + a_1 . b + a_0}$$

Al hacer estas divisiones sucesivas, sólo nos pueden quedar restos desde 0 hasta b-1, por lo tanto esta es la manera fácil y cómoda de convertir un número en decimal a otra base distinta cualquiera (porque es hacer cuentas en decimal también), dividiendo por la base deseada, y leyendo el resultado de derecha a izquierda:

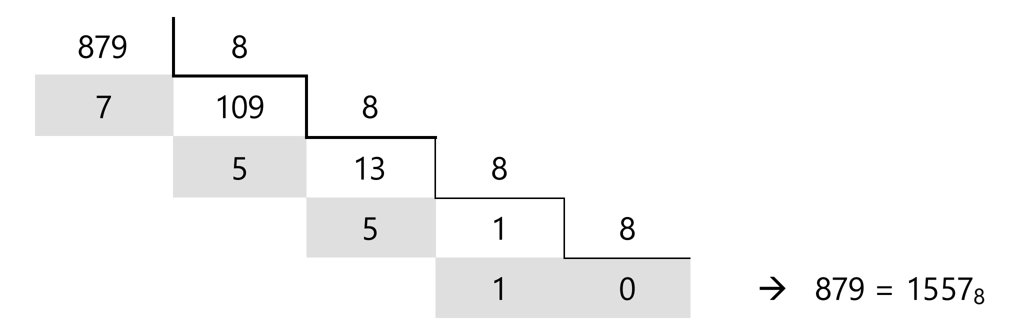
Ej. N°11: convertir 39 → base 2 (binario)



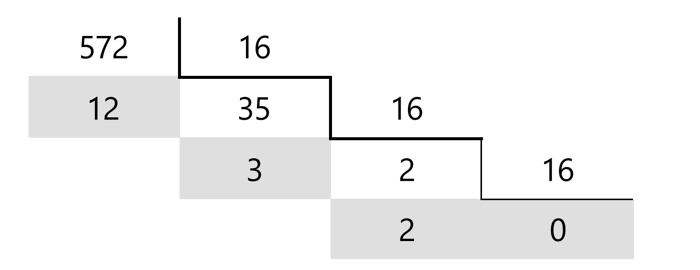
Ej. N°12: convertir 2139 → base 5



Ej. N°13: convertir 879 → base 8 (octal)

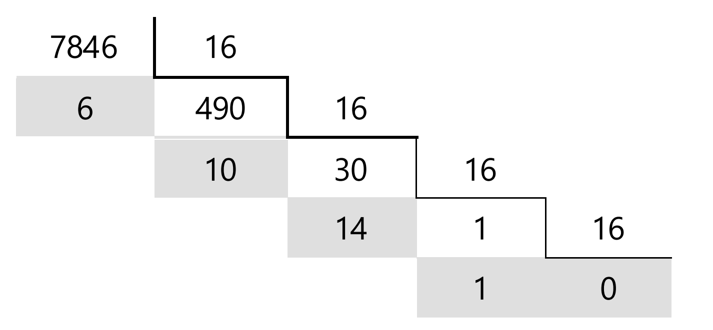


Ej. N°14: convertir 572 → base 16 (hexadecimal)



→ 572 = $23C_{16}$

Ej. N°15: convertir 7846 → base 16 (hexadecimal)



→ 7846 = $1EA6_{16}$

ACTIVIDAD: convertir decimal → binario:

2.1)	a) 25	gp	R: 11001_2
	b) 33	gp	R: 100001_2
	c) 49	gp	R: 110001_2
	d) 200	gp	R: 11001000_2
	e) 1000	gp	R: 1111101000_2
	f) 1526	gp	R: 10111110110_2

ACTIVIDAD: convertir decimal → octal:

2.2)	a) 35	gp	R: 43_8
	b) 56	gp	R: 70_8
	c) 88	gp	R: 130_8
	d) 100	gp	R: 144_8
	e) 1147	gp	R: 2173_8
	f) 3207	gp	R: 6207_8

ACTIVIDAD: convertir decimal → hexadecimal:

2.3)	a) 160	gp	R: $A0_h$
	b) 288	gp	R: 141_h
	c) 556	gp	R: $22C_h$
	d) 949	gp	R: $3B5_h$
	e) 2748	gp	R: ABC_h

f) 5104 gp R: $13F0_h$

2.5 Conversión de base "b" a decimal

Dado un número en base 2 (binario) se puede escribir:

peso :	2^n	...	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	...
N =	a_n	...	a_3	a_2	a_1	a_0	a_{-1}	a_{-2}	...

$$N = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 + a_{-1} \cdot 2^{-1} + + a_{-2} \cdot 2^{-2} + \ldots$$

Ej. N°16: convertir 110001_2 → decimal

La suma de potencias con todo escrito en decimal queda:

$$N = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 1 = 49$$

Dado un número en base 8 (octal) se puede escribir:

peso :	8^n	...	8^3	8^2	8^1	8^0	8^{-1}	8^{-2}	...
N =	a_n	...	a_3	a_2	a_1	a_0	a_{-1}	a_{-2}	...

$$N = a_n \cdot 8^n + a_{n-1} \cdot 8^{n-1} + a_{n-2} \cdot 8^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 8^1 + a_0 \cdot 8^0 + a_{-1} \cdot 8^{-1} + a_{-2} \cdot 8^{-2} + \ldots$$

Ej. N°17: convertir 2145_8 → decimal

La suma de potencias con todo escrito en decimal queda:

$$N = 2 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 1024 + 64 + 32 + 5 = 1125$$

Dado un número en base 16 (hexadecimal) se puede escribir:

peso :	16^n	...	16^3	16^2	16^1	16^0	16^{-1}	16^{-2}	...
N =	a_n	...	a_3	a_2	a_1	a_0	a_{-1}	a_{-2}	...

$$N = a_n \cdot 16^n + a_{n-1} \cdot 16^{n-1} + a_{n-2} \cdot 16^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 16^1 + a_0 \cdot 16^0 + a_{-1} \cdot 16^{-1} + \ldots$$

Ej. N°18: convertir $B1A9_8$ → hexadecimal

La suma de potencias con todo escrito en decimal queda:

$$N = 11 \cdot 16^3 + 1 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0 = 45056 + 256 + 160 + 9 = 45481$$

ACTIVIDAD: convertir binario → decimal:

2.4) a) 110101_2 gp R: 53

b) 101001_2 gp R: 41

c) 10_2 gp R: 2

	d) 11001101_2	gp	R: 205
	e) $1001{,}101_2$	gp	R: 9,625
	f) $1100{,}01_2$	gp	R: 12,25

ACTIVIDAD: convertir octal → decimal:

2.5)	a) 702_8	gp	R: 450
	b) 576_8	gp	R: 382
	c) 10_8	gp	R: 8
	d) 2350_8	gp	R: 168
	e) $1324{,}7_8$	gp	R: 724,875
	f) $2165{,}3_8$	gp	R: 1141,375

ACTIVIDAD: convertir hexadecimal → decimal:

2.6)	a) $ABBA_h$	gp	R: 43962
	b) $FAFA_h$	gp	R: 64250
	c) 10_h	gp	R: 16
	d) $2A5E_h$	gp	R: 10846
	e) 1234_h	gp	R: 4660
	f) $BB70_h$	gp	R: 47984

2.6 Conversión binario / octal / hexadecimal

Nos está faltando convertir entre binario, octal y hexadecimal. Las conversiones se pueden hacer de cualquiera de las dos formas anteriores, salvo que no estamos acostumbrados a trabajar haciendo multiplicación, potenciación, ni división, en octal, binario ni hexadecimal (notemos que, en párrafos anteriores, las cuentas eran en decimal). Por ello, emplearemos otras formas más fáciles, teniendo en cuenta que:

$8 = 2^3$ tres cifras en binario (número máx 7), una cifra en octal

$16 = 2^4$ cuatro cifras en binario (número máx 15), una cifra en hexadecimal

2.6.1 De binario a octal

Se convierte de binario a octal agrupando de a 3 cifras, comenzando de derecha a izquierda, y expresando el número en el símbolo octal correspondiente.

Ej. N°19: 101101_2 = 101 101 = 55_8

Ej. N°20: 110111010011_2 = 110 111 010 011 = 6723_8

Ej. N°21: 10011001_2 = 010 011 001 = 231_8

2.6.2 De binario a hexadecimal

Se convierte de binario a hexadecimal agrupando de a 4 cifras, comenzando de derecha a izquierda, y expresando el número en el símbolo hexadecimal correspondiente.

Ej. N°22: 101101_2 = 10 1101 = $2D_h$

Ej. N°23: 11111011101100_2 = 0011 1110 1110 1100 = $3EEC_h$

Ej. N°24: 100000010010_2 = 1000 0001 0010 = 812_h

2.6.3 De octal a binario

Se convierte de octal a binario expandiendo cada cifra octal en su equivalente binario en tres cifras binarias.

Ej. N°25: 5243_8 = 101 010 100 011 = 101010100011_2

Ej. N°26: 1076_8 = 001 000 111 110 = 1000111110_2

2.6.4 De hexadecimal a binario

Se convierte de hexadecimal a binario expandiendo cada cifra hexadecimal en su equivalente binario en cuatro cifras binarias.

Ej. N°27: $FD3_h$ = 1111 1101 0011 = 111111010011_2

Ej. N°28: $BABA_h$ = 1011 1010 1011 1010 = 1011101010111010_2

2.6.5 De hexadecimal a octal

Se convierte de hexadecimal a octal, convirtiendo primero a binario, y simplemente leyendo el número binario, agrupando en octal[4].

Ej. N°29: $FD3_h$ = 111111010011_2 = 111 111 010 011 = 7723_8

Ej. N°30: $CACA_h$ = 1100101011001010_2 = 145312_8

2.7)	1111011_2 → octal	gp	R: 173_8
2.8)	653_8 → binario	gp	R: 110101011_2
2.9)	514_8 → hexadecimal	gp	R: $14C_h$
2.10)	111100_2 → hexadecimal	gp	R: $3C_h$
2.11)	$3AE_h$ → octal	gp	R: 1656_8
2.12)	9999 → base 14	gp	R: 3903_{14}
2.13)	¿En qué base es correcta “13 . 25 = 153”?	gp	R: en base 6

[4] Conversión online entre bases. https://www.rapidtables.com/convert/number/base-converter.html

3. POLINOMIOS

Suma, producto, multiplicación y división. Forma desarrollada (suma de potencias) y forma factoreada de un polinomio. División general, división por regla de Ruffini (caso especial), y el teorema del resto (caso especial). Teorema de Gauss para raíces racionales. Saber los casos de factoreo de polinomios. Terminología: coeficiente principal, término independiente, polinomio mónico, monomios semejantes.

Un polinomio p en una variable x es una suma ordenada de **monomios**:

$$p(x) = a_n\, x^n + \, a_{n-1}\, x^{n-1} + a_{n-2}\, x^{n-2} + \cdots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$$

En donde:

a_n : coeficiente principal

n : grado del polinomio

a_0 : término independiente

si a_n = 1 se llama mónico ó reducido

monomio: coeficiente (número) multiplicado por x elevada al exponente $\mathbb{N}_0$.

Ej. N°1:

$$p(x) = 2\, x^5 - 3\, x^4 + \, x^3 + 4\, x^2 - 1$$

Este es un polinomio que tiene:

Coeficiente principal a_5 = 2

grado n = 5

Término independiente a_0 = -1

los otros coeficientes: a_4 = -3 ; a_3 = 1 ; a_2 = 4

5 monomios

3.1 Valor numérico, suma y resta de polinomios

El **valor numérico** de un polinomio en x = a, es el valor que adopta el polinomio cuando se reemplaza x = a.

3.1) VALOR NUMÉRICO gp

Dados los polinomios siguientes: $p(x) = -\,3x^2 + 4\,x + 5$

$q(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$

Hallar el valor numérico que adoptan:

a) p(0)
b) q(0)
c) p(-1)
d) p(-3)
e) q(1/2)
f) q(-2)
g) p(6)

R :

a) p(0) = 5
b) q(0) = -1
c) p(-1) = -2
d) p(-3) = -34
e) q(1/2) = -1
f) q(-2) = -31
g) p(6) = -79

h) q(-1/3) — h) q(-1/3) = -47/27

i) $[q(4)]^2$ — i) $[q(4)]^2 = 6889$

j) $[p(1)]^2$ — j) $[p(1)]^2 = 36$

La **suma** de dos polinomios p(x) + q(x) se hace sumando los monomios semejantes de ambos polinomios. La **resta** se hace sumando el polinomio opuesto del sustraendo, o sea p(x) + [-q(x)].

3.2) SUMA y RESTA gp

Dados los polinomios siguientes:

$p(x) = x^2 – 4x + 4$ $r(x) = – 2x^2 + 3x – 1$

$q(x) = 2x – 4$ $s(x) = 2x + 1$

Realizar las siguientes operaciones entre ellos:

a) 3 r(x) – s(x) + 2 p(x)	R :	a) $– 4x^2 – x + 4$
b) – 2 r(x) + s(x) – p(x)		b) $3x^2 – 1$
c) q(x) – s(x)		c) – 5
d) – 7 r(x) + 3 s(x)		d) $14x^2 – 15x + 10$
e) 4 r(x) – p(x)		e) $– 9x^2 + 16x – 8$
f) 5 r(x) + 2 q(x)		f) $– 10x^2 + 19x – 13$

3.2 Multiplicación de polinomios

La **multiplicación** de dos polinomios p(x) . q(x) se hace usando las propiedades de la multiplicación y la suma, multiplicando cada monomio de p(x) por cada monomio de q(x), lo que se llama *distribuyendo el producto*, luego sumando y ordenando.

3.3) MULTIPLICACIÓN gp

Tomando como dato los polinomios del problema anterior, hallar:

a) – r(x) . 2 p(x)	R :	a) $4x^4 – 22x^3 + 42x^2 – 32x + 8$
b) 3 r(x) p(x)		b) $– 6x^4 + 33x^3 - 63x^2 + 48x – 12$
c) q(x) . s(x)		c) $4x^2 – 6x – 4$
d) – 7 r(x) . 3 s(x)		d) $84x^3 – 84x^2 – 21x + 21$
e) 4 r(x) . p(x)		e) $– 8x^4 + 44x^3 – 84x^2 + 64x – 16$
f) 5 s(x) . 2 q(x)		f) $40x^2 – 60x – 40$

3.3 División de polinomios

La división de polinomios obtiene dos nuevos polinomios que resultan de proceder en forma similar a la división entera (ya vista con números):

p(x)	q(x)	p(x): dividendo	q(x): divisor
R(x)	c(x)	c(x): cociente	R(x): resto

Lo que expresado formalmente es:

$p(x) = q(x) \,.\, c(x) + R(x)$

Para dividir, el dividendo p(x) debe tener mayor grado que el divisor q(x). El grado del cociente c(x) será la resta entre los grados del dividendo y el divisor:

grado dividendo > grado divisor

grado cociente = grado dividendo – grado divisor

Se dividen dos polinomios con el procedimiento siguiente, que funciona siempre, para todas las divisiones de polinomios.

Ej. N°2:

Dividir los polinomios siguientes:

$p(x) = 6\,x^4 - 9\,x^3 + 2\,x + 1$ $\qquad q(x) = 3\,x^3 + 6\,x + 3$

1) Escribir el polinomio dividendo *completo* (es decir, todos los monomios con todos los exponentes, aunque no estén) y *ordenado* (monomios de grados de mayor a menor), a la izquierda, y el polinomio divisor, completo y ordenado a la derecha, de manera de quedar así:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 - 9x^3 + 0x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + 0x^2 + 6x + 3 \\ \hline \end{array}$$

2) Dividir el primer término de p(x) por el primer término de q(x), colocando el resultado como primer término del cociente c(x):

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 - 9x^3 + 0x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + 0x^2 + 6x + 3 \\ \cline{2-2} & \quad 2x \end{array}$$

Donde 2x es el resultado de $6x^4 / 3x^3$

3) Al resultado hallado y escrito (en este ejemplo 2x), multiplicarlo por todo el divisor, anotarlo debajo del dividendo, y *restarlo* del dividendo:

$$\begin{array}{rl|l} & 6x^4 - 9x^3 + 0x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + 0x^2 + 6x + 3 \\ \cline{3-3} - & 6x^4 + 0x^3 + 12x^2 + 6x & \quad 2x \\ \cline{2-2} & \quad - 9\,x^3 - 12x^2 - 4x & \end{array}$$

4) Al resultado obtenido en (3), o sea el polinomio: $-9x^3 - 12x^2 - 4x$

Tomarlo como nuevo dividendo, bajarle un término más (en este ejemplo el +1) y repetir los pasos 2, 3 y 4 hasta agotar la división, como se muestra más abajo:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 - 9x^3 + 0x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + 0x^2 + 6x + 3 \\ \cline{3-3}
- & 6x^4 + 0x^3 + 12x^2 + 6x & 2x - 3 \\ \cline{2-2}
 & -9x^3 - 12x^2 - 4x + 1 & \\
- & -9x^3 + 0x^2 - 18x - 9 & \\ \cline{2-2}
 & -12x^2 + 14x + 10 &
\end{array}
$$

Agotada la división, podemos escribir cociente y resto:

$c(x) = 2x - 3$ $\quad$ $R(x) = -12x^2 + 14x + 10$

Y podemos escribir el dividendo como:

$$6x^4 - 9x^3 + 2x + 1 = (3x^3 + 6x + 3)(2x - 3) + (-12x^2 + 14x + 10)$$

CUIDADO: un error muy frecuente es escribir lo siguiente:

$$\frac{6x^4 - 9x^3 + 2x + 1}{3x^3 + 6x + 3} = 2x - 3$$

Lo que claramente no responde a la ecuación del dividendo. Si quisiéramos escribir ese cociente, tenemos que trabajar correctamente con la ecuación anterior, esto es dividir m.a.m por el divisor:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{R(x)}{q(x)}$$

$$\frac{6x^4 - 9x^3 + 2x + 1}{3x^3 + 6x + 3} = 2x - 3 + \frac{-12x^2 + 14x + 10}{3x^3 + 6x + 3}$$

OPCIÓN: desde el punto (3) podemos operar de una manera alternativa para hacer la resta, es decir, en lugar de restar, sumar, lo que siempre es más cómodo, de la siguiente manera:

Ej. N°3:

3) Al resultado hallado (en este ejemplo 2x), le **cambiamos el signo**, quedando en este ejemplo (-2x) y eso lo multiplicamos por todo el divisor, luego *sumamos* al dividendo:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 - 9x^3 + 0x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + 0x^2 + 6x + 3 \\ \cline{3-3}
+ & -6x^4 - 0x^3 - 12x^2 - 6x & 2x \\ \cline{2-2}
 & -9x^3 - 12x^2 - 4x &
\end{array}
$$

4) Al resultado de (3), tomarlo como nuevo dividendo, bajarle un término más (en este ejemplo +1) y repetir los pasos 2, 3 y 4 hasta agotar la división, como se muestra más abajo:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 - 9x^3 + 0x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + 0x^2 + 6x + 3 \\ \cline{3-3}
+ & -6x^4 - 0x^3 - 12x^2 - 6x & 2x - 3 \\ \cline{2-2}
 & -9x^3 - 12x^2 - 4x + 1 & \\
+ & 9x^3 - 0x^2 + 18x + 9 & \\ \cline{2-2}
 & -12x^2 + 14x + 10 &
\end{array}
$$

3.4 División para un caso especial: Regla de Ruffini

La Regla de Ruffini es una forma simplificada **para dividir polinomios**. No se puede usar en todos los casos, no reemplaza a la división general, y sirve sólo para un **caso especial**, que es cuando se dan las siguientes condiciones:

- El divisor tiene la forma (x + a)
- El divisor es mónico (si bien es redundante decirlo porque "x+a" ya indica que es mónico, conviene aclararlo así no olvidarlo)

Ej. N°4:

Dividir p(x) / q(x) siendo:

$p(x) = 2x^6 + 5x^4 - x^3 + 1$

$q(x) = x + 2$

La regla de Ruffini es hacer lo siguiente para concretar la división:

1) Escribir los coeficientes del polinomio dividendo *completo* (es decir coeficientes de todos los exponentes) y *ordenado* (los exponentes de mayor a menor), colocando el término independiente del divisor, cambiado de signo, en el vértice entre las dos líneas que se dibujan abajo:

	2	0	5	-1	0	0	1
-2							

2) Copiar el coeficiente principal del dividendo, debajo de la línea horizontal, como se muestra:

	2	0	5	-1	0	0	1
-2	↓						
	2						

3) Multiplicar el número puesto en el vértice (paso 1), por el número bajado (paso 2) y colocar el resultado debajo del siguiente coeficiente del dividendo:

	2	0	5	-1	0	0	1
-2		**-4**					
	2						

4) Sumar la columna y colocar el resultado debajo de la línea:

	2	0	5	-1	0	0	1
-2		-4					
	2	**-4**					

5) Repetir los pasos (3) y (4):

	2	0	5	-1	0	0	1
-2		-4	**8**				
	2	-4	**13**				

6) Continuar repitiendo (5) hasta agotar la fila. La última suma, será el resto de la división p(x) / q(x) buscada:

	2	0	5	-1	0	0	1	
-2		-4	8	-26	54	-108	216	
	2	-4	13	-27	54	-108	**217**	← Resto

Los números resultantes debajo de la fila, son los coeficientes del cociente, los que según la regla de la división, empiezan en el grado n-1 (en este ejemplo, grado 5).

$c(x) = 2\,x^5 - 4\,x^4 + 13\,x^3 - 27\,x^2 + 54\,x - 108$ $\qquad$ $R = 217$

Y entonces podemos escribir el dividendo como:

$$2x^6 + 5x^4 - x^3 + 1 = (2x^5 - 4x^4 + 13x^3 - 27x^2 + 54x - 108)(x + 2) + 217$$

3.4) DIVISIÓN por el método general gp

Hacer las siguientes divisiones de polinomios:

a) $\dfrac{2x^3 + 9x^2 + 26}{x^2 + 3x + 7}$ R : a) $c(x) = 2x + 3$

$r(x) = -23x + 5$

b) $\dfrac{x^5 + 2x^3 - x - 8}{x^2 + x + 1}$ b) $c(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$

$r(x) = -2x - 7$

c) $\dfrac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 - x - 6}$ c) c(x) = x + 5

r(x) = 15x + 30

d) $\dfrac{4x^4 + 3x^3 - 2x + 6}{x^2 + 2x - 3}$ d) c(x) = $4x^2 - 5x + 22$

r(x) = $-61x + 72$

e) $\dfrac{2x^6 + 5x^4 - x^3 + 1}{-x^2 + x + 1}$ e) c(x) = $-2x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 10x - 19$

r(x) = 29x + 20

f) $\dfrac{2x^6 + 5x^4 - x^3 + 1}{x + 2}$ f) c(x) = $2x^5 - 4x^4 + 13x^3 - 27x^2 + 54x - 108$

r = 217

3.5) DIVISIÓN por regla de Ruffini gp

Hacer las siguientes divisiones de polinomios por la regla de Ruffini:

a) $\dfrac{3x^5 - x^3 - 2x^2 + 6x - 4}{x - 1}$ R : a) c(x) = $3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6$

r(x) = 2

b) $\dfrac{-2x^5 + x^4 - 2x^2 + x - 1}{x - 2}$ b) c(x) = $-2x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 14x - 27$

r(x) = -55

c) $\dfrac{-2x^6 + x^5 + 2x^3 + 3x + 1}{x + 1}$ c) c(x) = $-2x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 5x + 8$

r(x) = -7

d) $\dfrac{x^6 + x^5 - 2x^3 + 3x + 1}{1 - x}$ d) c(x) = $-x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 3$

r(x) = 4

e) $\dfrac{-x^5 + 2x^3 - 3x + 2}{2 - x}$ e) c(x) = $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 11$

r(x) = -20

3.6) MEZCLA LT-TP3-1

Con los polinomios que son dato del problema 3.2, hallar:

a) p(x) + q(x) R : a) $x^2 - 2x$

b) p(x) – 2 q(x) b) $x^2 - 8x + 12$

c) 3 p(x) q(x) c) $6x^3 - 36x^2 + 72x - 48$

d) p(x) / q(x) d) cociente = ½ x – 1 ; resto = 0

e) $[q(x)]^2$ e) $4x^2 - 16x + 16$

f) $[p(x)]^2$ f) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

3.7) AÚN MÁS MEZCLA gp

Con los polinomios que son dato del problema 3.2, hallar:

a) r(x) + s(x) R : a) $-2x^2 + 5x$

b) $2\,r(x) - s(x)$ b) $-4x^2 + 4x - 3$

c) $-r(x)\,s(x)$ c) $4x^3 - 4x^2 - x + 1$

d) $r(x) / s(x)$ d) cociente = $-x + 2$; resto = -3

e) $\frac{1}{2}[s(x)]^2$ e) $2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$

f) $[r(x)]^2$ f) $4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1$

3.5 Raíz de un polinomio

Se llama raíz de un polinomio al valor de la variable (o "las variables", si el polinomio tuviera más de una variable) que hace que el **valor numérico** del polinomio sea **cero**.

Si llamamos "r" a la raíz del polinomio p(x), entonces podemos afirmar, según la definición dada, que:

$p(r) = 0 \quad \leftrightarrow \quad r$ es raíz de $p(x)$

Se demuestra que un polinomio tiene tantas raíces como su grado:

grado n → tiene n raíces

Ej. N°5:

El polinomio x-2 tiene una raíz (porque es de grado 1) que vale:

$r-2 = 0$

$r=2$

Ej. N°6:

El polinomio (x-2) (x+3) tiene dos raíces (porque es de grado 2) que valen:

$(x-2)(x+3) = 0$

$r_1 = 2 \quad \vee \quad r_2 = -3$

3.8) Hallar el polinomio de grado mínimo p(x) tal que:

a) Es reducido, tiene raíces simples en –1 y 3, y tiene raíz doble 6
b) Tiene raíces simples en 2 y –2, y p(–1) = 3

R : a) $p(x) = x^4 - 14x^3 + 57x^2 - 36x - 108$ b) $-x^2 + 4$ LT-TP3-6

3.9) Hallar todos los coeficientes del siguiente polinomio :

$p(x) = -(3x^2 - x)(x-2)(x^2+2x-1) + (x-1)(x^2-x+1)(x^2-x+4)$

R : $a_5 = -2$; $a_4 = -2$; $a_3 = 23$; $a_2 = -22$; $a_1 = 11$; $a_0 = -4$ gp

3.10) Desarrollar los siguientes cuadrados del binomio:

a) $(3x + 2)^2$
b) $(4 - x)^2$

c) $(5 + 6x)^2$
d) $(x + 2y)^2$
e) $(2p - 6)^2$

R : a) $9x^2 + 12x + 4$ b) $x^2 - 8x + 16$ c) $36x^2 + 60x + 25$ gp

d) $4y^2 + 4xy + x^2$ e) $4p^2 - 24p + 36$

3.11) Desarrollar las siguientes diferencias de cuadrados:

a) $(3x - 2)(3x + 2)$
b) $(4 + x)(4 - x)$
c) $(-5 + 6x)(5 + 6x)$
d) $(x - 2y)(x + 2y)$
e) $(2p - 6)(2p + 6)$

R : a) $9x^2 - 4$ b) $16 - x^2$ c) $36x^2 - 25$ gp

d) $x^2 - 4y^2$ e) $4p^2 - 36$

3.6 Teorema del resto

El Teorema del Resto calcula el resto de una división entre polinomios, sin hacer la división. Lo hace sólo para el caso particular en que el divisor tenga la forma (x+a). Es decir que no se puede aplicar en cualquier caso, tienen que darse las hipótesis del teorema. Al ocurrir esto, el teorema dice que el resto de la división entre p(x) y un polinomio (x+a) es el valor numérico del dividendo en (-a). En símbolos:

$$R\left[\frac{p(x)}{x+a}\right] = p(-a)$$

Ej. N°7: hallar el resto de la división $(4x^3 - 3x^2 + x + 2) / (x+1)$ usando T.Resto.

$$R\left[\frac{4x^3 - 3x^2 + x + 2}{x+1}\right] = p(-1) = 4\,(-1)^3 - 3(-1)^2 + (-1) + 2 = -6$$

Ej. N°8: hallar el resto de la división $(-x^4 + x^3 + 2x + 7) / (x-2)$ usando T.Resto.

$$R\left[\frac{-x^4 + x^3 + 2x + 7}{x-2}\right] = p(2) = -(2)^4 + (2)^3 + 2\,.\,2 + 7 = 3$$

3.7 Divisibilidad entre polinomios

Análogamente a los números, un polinomio puede ser también múltiplo (o divisor) de otro polinomio. Se dice que *un polinomio p(x) es divisible por otro polinomio q(x), cuando la división p(x) / q(x) resulta tener resto cero*.

Pensemos una división entre un dividendo p(x) con un divisor de la forma (x-raíz).
¿Qué quedará como resto? Según el teorema del resto, el resto será:

$$R\left[\frac{p(x)}{x - r}\right] = p(r)$$

Al mismo tiempo, por definición de raíz de un polinomio, p(r)=0:

$$R\left[\frac{p(x)}{x - r}\right] = p(r) = 0$$

Por lo tanto, **todo polinomio p(x) es divisible por (x-raíz)**, y esto es válido para todas las raíces del polinomio.

3.8 Factoreo de polinomios

Vimos que factorear un número, era descomponerlo en el producto de otros números, que son *factores* en un producto, y esencialmente hemos hallado el producto de los *factores primos* de un número compuesto.

Ej. N°9: 12.600 = $2^3 . 3^2 . 5^2 . 7$

Los factores primos del número 12.600 son 2, 3, 5 y 7, elevados a las potencias indicadas, y esta descomposición es única. También podemos buscar otros divisores del 12.600 no primos, también hay divisores compuestos. Por ejemplo, el 72, el 25, o cualquier otra combinación de los factores (divisores) primos anteriores.

Ej. N°10: 12.600 = 72 . 25 . 7

Factorear un polinomio es exactamente lo mismo que hicimos con números, es decir, **hallar sus polinomios divisores primos y escribir el polinomio en la forma factoreada**, que es el producto de sus polinomios primos divisores.

Ej. N°11: Dado el siguiente polinomio: $p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 6x + 20$

Factorearlo es hacer todo lo necesario para convertirlo a la forma factoreada, eso se hace hallando las raíces del polinomio:

Raíces del polinomio: -1 ; 2 ; 5

Polinomios primos divisores: (x+1) ; (x-2) ; (x-5)

Polinomio factoreado (el resultado que buscamos): p(x) = 2 (x+1) (x-2) (x-5)

¿Por qué buscamos los polinomios primos, y no otros? Porque ellos son los que nos permiten reescribir al polinomio que queremos factorear, en cualquier otro producto de polinomios. Todas las combinaciones de polinomios posibles multiplicados entre sí, se pueden lograr cuando conocemos sus divisores primos (igual que con números). Los factores primos son como los "ladrillos fundamentales" del polinomio, con ellos se puede construír otra cosa, en nuestro caso otros polinomios.

Ej. N°12: al polinomio factoreado en el Ej. 11, lo podemos escribir de otra manera, si primero desarrollamos el producto (x+1) (x-2) = $x^2 - x - 2$. Quedando:

$p(x) = 2 (x^2 – x – 2) (x-5)$

Ahora tenemos escrito p(x) como el producto de un polinomio compuesto $(x^2 – x – 2)$ por un polinomio primo (x-5). El factoreo debe ser hecho con algún *procedimiento analítico lícito*, no se hacen ni gráficamente, ni mucho menos "al tanteo".

Para factorear polinomios, usamos alguno de los casos de factoreo, ellos son los que logran convertir un *polinomio expandido,* a la *forma factoreada*, cuyo modelo general es el siguiente:

Forma factoreada de un polinomio

La forma factoreada es el producto (x-raíz$_1$) (x-raíz$_2$) y así sucesivamente con todas las raíces que tenga el polinomio, y cada paréntesis elevado al orden de multiplicidad de cada raíz.

$$\mathbf{p(x) = a_n (x-r_1)^{\alpha} (x-r_2)^{\beta} \ldots (x-r_n)^{\lambda}}$$

En donde:

a_n es el coeficiente principal

$r_1 ; r_2 \ldots r_n$ son las n raíces del polinomio

$\alpha ; \beta \ldots \lambda$ es el orden de multiplicidad de cada una de las n raíces del polinomio

La suma de todos los órdenes es: $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n$

Veremos los siete (7) casos de factoreo a continuación:

1° caso de factoreo: factor común

Cuando todos los términos del polinomio tienen un factor en común.

Ej. N°13: $p(x) = -3x + 2x + 6x +20x$

El factor que tienen en común todos los monomios de p(x), en este caso es x, lo podemos factorear entonces "sacándolo afuera" de cada uno de los términos:

$p(x) = x (-3 + 2 + 6 +20) = 25 x$

Y esta es la forma factoreada de p(x).

Ej. N°14:

$q(x,y,z) = 6x + 6y + 6z$

Ahora el factor en común es el 6, lo factoreamos, quedando la *forma factoreada*:

$q(x,y,z) = 6 (x + y + z)$

Ej. N°15: sea el polinomio $r(x) = 20x^3 – 5x^2 - 10x$

Vemos en el polinomio r(x) que el factor común es 5x. Lo "sacamos afuera" para que quede multiplicando a todo lo demás:

$r(x) = 5x\ (4x^2 – x – 2)$

¿Qué estamos haciendo al buscar el factor común? Buscar el MCD de todos los términos del polinomio, y cuando esto existe, se trata del primer caso de factoreo.

2° caso de factoreo: factoreo por grupos

Similar al caso 1, salvo que tenemos dos (o más) grupos de términos para factorear, con factores en común diferentes.

Ej. N°16: $p(x) = x^2 – 3x – 5x + 15$

Acá tenemos dos grupos que podemos factorear distinto:

$p(x) = (x^2 – 3x) + (– 5x + 15) = x\ (x – 3) – 5\ (x – 3)$

Quedó un nuevo factor en común, el (x-3), que volvemos a factorear:

$p(x) = (x – 3)\ (x – 5)$

¿Siempre ocurre que después del primer factoreo por grupos, aparece otro?

No, no siempre es posible hacer la segunda etapa.

3° caso de factoreo: trinomio cuadrado perfecto (TCP)

El cuadrado del binomio es: $(a + b)^2 = (a + b) . (a + b) = a^2 + 2\ ab + b^2$

$(a – b)^2 = (a - b) . (a - b) = a^2 – 2\ ab + b^2$

En el desarrollo del cuadrado del binomio, vemos que queda un *trinomio* (tres monomios), este trinomio es especial porque no es cualquier trinomio, sino justo el desarrollo de un cuadrado, por eso se llama "perfecto". Lo que buscamos es chequear si el trinomio es *trinomio cuadrado perfecto (TCP)*, y así poder transformarlo (factorearlo) en un binomio al cuadrado.

Ej. N°17: $p(x) = x^2 + 6x + 9$

Es un trinomio, nos queda por ver si es *trinomio cuadrado perfecto (TCP)*. Lo vemos comparando con el desarrollo del cuadrado del binomio. Efectivamente lo es, porque:

$p(x) = x^2 + 2 . 3x + 3^2$

$a = x$ $b = 3$

Y entonces podemos expresarlo en la forma factoreada:

$p(x) = (x + 3)^2$

Ej. N°18: sea el polinomio $q(x) = x^2 – 4x + 4$, en este caso vemos que:

$q(x) = x^2 – 2 . 2x + 2^2$

$a = x$ $b = 2$

Por lo tanto queda factoreado como:

$q(x) = (x - 2)^2$

Ej. N°19: otro de TCP, sea el polinomio $r(x) = 25x^2 - 20x + 4$, vemos que:

$r(x) = (5x)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2x + 2^2$

$a = 5x \qquad b = 2$

Por lo tanto queda factoreado como:

$r(x) = (5x - 2)^2$

4° caso de factoreo: cuatrinomio cubo perfecto (CCP)

El cubo del binomio es: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Lo que resulta al desarrollar el cubo del binomio, es un *cuatrinomio* (cuatro monomios) que es especial porque no es cualquier cuatrinomio, sino justo el desarrollo de un cubo, por eso el nombre "perfecto". Lo que buscamos para factorear un polinomio usando este caso, es un cuatrinomio que sea justo un *cuatrinomio cubo perfecto (CCP)*, y así lo transformamos (factoreamos) en un binomio al cubo.

Ej. N°20: $p(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

$a = x \qquad b = -2$

Y como coincide, podemos expresarlo en la forma factoreada: $p(x) = (x - 2)^3$

Ej. N°21: $p(x) = 27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 + y^3$

$a = 3x \qquad b = -y$

Comparando el resto de los términos, es un cuatrinomio cubo perfecto y entonces:

$p(x) = (3x - y)^3$

5° caso de factoreo: diferencia de cuadrados

El siguiente producto se llama "diferencia de cuadrados" debido al resultado final:

$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

Por lo tanto, si vemos que tenemos la diferencia de dos cuadrados, podemos factorearla, o sea transformarla en el producto del primer miembro.

Ej. N°22: si tenemos: $p(x) = 25x^2 - 36$

Podemos ver la resta del segundo miembro como:

$25x^2 = (5x)^2 \qquad 36 = 6^2$

Que es una diferencia de cuadrados, y entonces el polinomio puede expresarse factoreando la diferencia de cuadrados:

$p(x) = (5x + 6)\ (5x - 6)$

Ej. N°23:

$q(x) = 16\ x^2 – 25\ y^2$

La resta se puede ver como: $16\ x^2 = (\ 4x\ )^2$

$25\ y^2 = (\ 5y\ )^2$

Y entonces la forma factoreada queda: $q(x) = (4x + 5y)\ (4x – 5y)$

6° caso de factoreo: suma y diferencia de potencias homogéneas

Se demuestra que el binomio (x+y) o bien el binomio (x-y) son *divisores* en algunos casos, de expresiones del tipo $(x^n \pm y^n)$, para entonces dividir con resto cero:

$$\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$$

Dividiendo:		El resto es cero si n:
+/+	$\frac{x^n + y^n}{x + y}$	**I** (impar)
+/-	$\frac{x^n + y^n}{x - y}$	**N** (nunca)
-/+	$\frac{x^n - y^n}{x + y}$	**P** (par)
-/-	$\frac{x^n - y^n}{x - y}$	**S** (siempre)

Ej. N°24: si tenemos el cociente:

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y}$$

Es divisible, porque responde al caso S(siempre). Y la división puede hacerse por regla de Ruffini, donde ya sabemos que el resto tiene que dar cero.

7° caso de factoreo: Teorema de Gauss

Es un método exploratorio que encuentra las raíces racionales de un polinomio (las otras, de haberlas, no las ve). Las condiciones para poder aplicar el teorema de Gauss (hipótesis del teorema) son las siguientes:

H: el polinomio debe tener $a_0 \neq 0$ $a_i \in \mathbb{Z}$ $n \geq 1$

Dadas estas condiciones, el teorema afirma (tesis), que si se toman todos los divisores enteros "a" del término independiente a_0, y "b" del coeficiente principal a_n, es decir:

$a \mid a_0 \quad \wedge \quad b \mid a_n$

con $a ; b \in \mathbb{Z}$ y ambos coprimos entre sí

Entonces el número racional **a/b** *podría ser raíz de p(x)*.

Observaciones:

1. El Teorema de Gauss sólo indica la existencia de raíces racionales (no indica raíces irracionales, ni complejas).
2. Los valores "que ofrece" el T. de Gauss, son sólo "posibles raíces", por lo cual cada valor ofrecido por el teorema deberá ser chequeado.
3. El T. de Gauss no informa el orden de multiplicidad de las raíces. Eso, lo tendremos que averiguar nosotros.

Ej. N°25: encontrar las raíces del siguiente polinomio usando el Teorema de Gauss.

$$p(x) = 2\,x^4 + 20\,x^3 + 58\,x^2 + 16\,x - 96$$

Verificando las hipótesis del teorema:

$a_0 = -96 \neq 0$ ¿$a_i \in \mathbb{Z}$? SI ¿$n \geq 1$? SI

Divisores del término independiente: a = ±1 ; ±2 ; ±3 ; ±4 ; ±6 ; ±8 ; ±12 ; ±16 ; ±24 …

Divisores del coeficiente principal: b = ±1 ; ±2

Calculando a / b = ±1/2 ; ±1 ; ±3/2 ; ±2 ; ±3 ; ±4 ; ±6 ; ±8 ; ±12 ; ±16 ; ±24 ; ±32

Queda por verificar cuáles de estos a/b son raíces de p(x).

Posible raíz de p(x)	$p(x) = 2\,x^4 + 20\,x^3 + 58\,x^2 + 16\,x - 96$	¿es raíz?
1	p(1) = 2 + 20 + 58 + 16 – 96 = 0 ✓	**SI**
-1	p(-1) = 2 – 20 + 58 – 16 x – 96 = – 72	No
2	p(2) = 2.16 + 20.8 + 58.4 + 16.2 – 96 = 360	No
-2	p(-2) = 2.16 – 20.8 + 58.4 – 16.2 – 96 = –24	No
3	p(3) = 2.81 + 20.27 + 58.9 + 16.3 – 96 = 1176	No
-3	p(-3) = 2.81 – 20.27 + 58.9 – 16.3 – 96 = 0 ✓	**SI**
4	p(4) = 2.256 + 20.64 + 58.16 + 16.4 – 96 = 2688	No
-4	p(-4) = 2.256 – 20.64 + 58.16 – 16.4 – 96 = 0 ✓	**SI**

Y sería posible seguir probando más valores de posibles raíces ofrecidas por el T.Gauss, a la búsqueda de la cuarta raíz que aún falta encontrar. Esto podría resultar largo y engorroso. Pero además, sería un desperdicio del tiempo, ya que alguna de las raíces ya encontradas podría ser doble, con lo cual, si seguimos probando valores crecientes, no podremos encontrar dicha cuarta raíz, porque no existe.

Esto sugiere que es conveniente, una vez que hemos determinado algunas de las raíces, dividir por Regla de Ruffini, por las raíces ya encontradas, lo que en este caso dejará un polinomio de grado 1, lo cual automáticamente dejará en evidencia cuál es la 4°

raíz que estamos buscando.

	2	20	58	16	-96	
1		2	22	80	96	← Dividiendo por (x-1)
	2	22	80	96	0	$c(x) = 2x^3 + 22x^2 + 80x + 96 \quad r = 0$
-3		-6	-48	-96		← Dividiendo por (x+3)
	2	16	32	0		$c(x) = 2x^2 + 16x + 32 \quad r = 0$
-4		-8	-32			← Dividiendo por (x+4)
	2	8	0			$c(x) = 2x + 8 \quad r = 0$

Con estos cocientes podemos reescribir el polinomio como:

$$p(x) = 2x^4 + 20x^3 + 58x^2 + 16x - 96 = (2x^3 + 22x^2 + 80x + 96)(x - 1)$$

Con los sucesivos cocientes también factoreados como:

$$2x^3 + 22x^2 + 80x + 96 = (2x^2 + 16x + 32)(x + 3)$$

$$2x^2 + 16x + 32 = (2x + 8)(x + 4)$$

En donde se ve que se puede escribir p(x) como:

$$p(x) = (x - 1)(x + 3)(2x + 8)(x + 4)$$

De donde fácilmente obtenemos la raíz que estaba faltando:

$$p(x) = 2(x - 1)(x + 3)(x + 4)(x + 4)$$

Y entonces 4 es raíz doble:

$$p(x) = 2(x - 1)(x + 3)(x + 4)^2$$

Otra forma de verlo es colocando todos los binomios divisores juntos debajo de p(x), que en definitiva es lo que hemos hecho:

$$\frac{\frac{\frac{2x^4 + \ 20x^3 + 58x^2 + 16x - 96}{x - 1}}{x + 3}}{x + 4} = 2x + 8$$

Y es evidente que vuelve a quedar x + 4 (raíz doble), porque podemos escribir el dividendo como:

$$2x^4 + \ 20x^3 + 58x^2 + 16x - 96 = (2x + 8)(x - 1)(x + 3)(x + 4)$$

$$2x^4 + \ 20x^3 + 58x^2 + 16x - 96 = 2\ (x - 1)(x + 3)(x + 4)^2$$

Ej. N°26: ¿se puede aplicar T. de Gauss a una expresión que no es polinomio? No, salvo que sea posible hacer una transformación que lo convierta en polinomio. Como ejemplo, hallar las soluciones de la ecuación siguiente:

$$x^{-6} - \ 2x^{-4} - 11x^{-2} + 12 = 0$$

F1.T4.22.03 / mod gp

El primer miembro no es un polinomio, pero si hacemos un cambio de variable adecuado, por ej: $y = x^{-2}$, la expresión queda:

$$y^3 - 2y^2 - 11y + 12 = 0$$

Ahora sí, el primer miembro es un polinomio en y, por lo tanto podemos dar los pasos para aplicar el T. de Gauss. Verificando las hipótesis del teorema:

$a_0 = 12 \neq 0$ ¿$a_i \in \mathbb{Z}$? SI ¿$n \geq 1$? SI

Divisores del término independiente: a = ±1 ; ±2 ; ±3 ; ±4 ; ±6 ...

Divisores del coeficiente principal: b = ±1

Calculando a / b = ±1 ; ±2 ; ±3 ; ±4 ; ±6 ; ±12

Queda por verificar cuáles de estos a/b son raíces de p(x).

Posible raíz de p(x)	$p(x) = y^3 - 2y^2 - 11y + 12$	¿es raíz?
1	p(1) = 1 – 2 – 11 + 12 = 0 ✓	**SI**
-1	p(-1) = – 1 – 2 +11+12 = 20	No
2	p(2) = 8 – 8 – 22 + 12 = – 10	No
-2	p(–2) = – 8 – 8 + 22 + 12 = 18	No
3	p(3) = 27 – 18 – 33 + 12 = – 12	No
-3	p(-3) = – 27 – 18 + 33 + 12 = 0 ✓	**SI**
4	p(4) = 64 – 32 – 44 + 12 = 0 ✓	**SI**

Halladas tres raíces, no tiene sentido continuar pues no puede haber más de tres raíces en un polinomio de tercer grado. La segunda conclusión es que las tres raíces no pueden ser otra cosa que raíces simples:

$$y^3 - 2y^2 - 11y + 12 = (y-1)(y+3)(y-4) = 0$$

Por lo tanto las soluciones a la ecuación serán: y=1 ; y=–3; y=4 restando hallar x.

$$1 = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \pm 1$$

$$-3 = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{sin solución real}$$

$$4 = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \pm 1/2$$

El conjunto solución (en los reales) es entonces: S = { ±1 ; ±1/2 }

ACTIVIDAD: hacer los siguientes factoreos de polinomios.

3.12) Factorear el polinomio $p(x) = 3 x^5 - 27 x^3 + 12 x^2 + 36 x$

R : $p(x) = 3 x (x-2)^2 (x+1) (x+3)$ gp

3.13) Factorizar el polinomio $p(x) = x^3 - 7 x + 6$

R : $p(x) = (x-1) (x+3) (x-2)$ P1.T1.1302

3.14) Factorear el polinomio $p(x) = - x^4 + 9 x^2 + 4 x - 12$

R : $p(x) = -(x+2)^2 (x-1) (x-3)$ gp

3.15) Factorizar el polinomio $p(x) = 2 x^3 - 3 x^2 - 3 x + 2$

R : $p(x) = 2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$ LT-TP3-8.1

3.16) Sabiendo que el polinomio p(x) siguiente, es divisible por (x-2), y también por (x+2), hallar los valores de α y β y luego expresar p(x) en la forma factoreada.

$p(x) = (\alpha+\beta) x^3 - \frac{1}{2} x^2 - 4x + (4\alpha + 3\beta)$

R : $\alpha = -1$ $\beta = 2$ $p(x) = (x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$ P1.T1.20.02 / mod gp

3.9 Divisibilidad, resto

3.17) ¿Cuál es el resto de dividir $p(x) = 3 x^3 + 2 x - 4$ por $q(x) = x + 1$

R : -9 LT-TP3-3

3.18) Una raíz real del polinomio $p(x) = k x^5 + (k - 1) x^2 + 5$ es 1, con k constante real no nula, a determinar. Hallar el resto de la división entre p(x) y $q(x) = 2 - x^2$

R : $k = -2$ $r(x) = -8x - 1$ LPE-119

3.19) Sea $p(x) = 4 x^3 + a x^2 + b x - 6$ Cuando este polinomio se divide por (x – 2), el resto es a. Cuando se divide por (x+1), el resto es b. Hallar dicho resto si se divide p(x) por (x+2), previa determinación de las constantes a y b.

R : $a = -4$ $b = -7$ $r(x) = -40$ LPE-226

3.20) Hallar las constantes a y b para que $x^2 + 4$ sea factor de $x^3 + 3 x^2 + a x + b$

R : $a = 4$ $b = 12$ P1.1103

3.21) Determine la constante real negativa "m", tal que $p(x) = x^3 + 3 x^2 - x - 9 m$ sea divisible por $q(x) = x - m$

R : $m = -5$ P1.T1.1410

3.22) Hallar el valor real de a, para que el resto de la división entre:

$p(x) = -x^4 + 2 x^2 - (a-1)^2 x + 1$ y

$b(x) = x + 1$ (en ese orden) sea igual a 11

R : $\{-2\,;4\}$ LT-TP3-8.4

3.23) Dado el polinomio $p(x) = a\,x^3 + a\,x^2 + 7\,x + b$ hallar los valores de a y b para que p(x) sea divisible por el polinomio $q(x) = x - 1$ y por el polinomio $r(x) = x + 3$

R : $a = -\frac{7}{5}\ ;\ b = -\frac{21}{5}$ LT-TP3-9.2

3.10 Denominador común

En las expresiones algebraicas puede ser necesario unificar denominadores también.

Ej. N°27: unificar los denominadores $\frac{5}{(x-1)} - \frac{2}{(x+3)}$

Estos denominadores son *coprimos*, es decir ninguno es múltiplo ni divisor del otro, el único divisor en común es el 1, de modo que el mcm entre ellos es su producto.

$$\frac{5}{(x-1)}\ \frac{\boldsymbol{(x+3)}}{\boldsymbol{(x+3)}} - \frac{2}{(x+3)}\ \frac{\boldsymbol{(x-1)}}{\boldsymbol{(x-1)}}$$

$$\frac{5\,(x+3) - 2\,(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$\frac{5x + 15 - 2x + 2}{(x-1)(x+3)}$$

$$\frac{3x + 17}{(x-1)(x+3)}$$

Ej. N°28: unificar los denominadores $\frac{3}{(y-1)} - \frac{2}{y^2-1}$

El segundo denominador es una *diferencia de cuadrados* (5° caso de factoreo) por lo tanto es múltiplo del primero, por lo tanto es el mcm para el denominador común.

$$\frac{3}{(y-1)}\ \frac{\boldsymbol{y+1}}{\boldsymbol{y+1}} - \frac{2}{y^2-1}$$

$$\frac{3\,(y+1) - 2}{y^2-1}$$

$$\frac{3y + 3\ - 2}{y^2-1}$$

$$\frac{3y + 1}{y^2-1}$$

Ej. N°29: unificar los denominadores $\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2-1} - \frac{3}{z+1}$

El segundo denominador es múltiplo del tercero, pero el primero no está como factor de ninguno de los demás, por lo tanto el mcm es z . (z^2 – 1)

$$\frac{1}{z}\ \frac{\boldsymbol{z^2-1}}{\boldsymbol{z^2-1}}+\frac{2}{z^2-1}\ \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}}-\frac{3}{z+1}\ \frac{\boldsymbol{z(z-1)}}{\boldsymbol{z(z-1)}}$$

$$\frac{z-1+2z-3z\,(z-1)}{z(z^2-1)}$$

$$\frac{z^2-1+2z-3z^2+3z}{z(z^2-1)}$$

$$\frac{-2z^2+5z-1}{z(z^2-1)}$$

Ej. N°30: unificar los denominadores $x+\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x}$

Donde no hay denominador, el mismo vale 1, y el procedimiento es el mismo.

$$x\ \frac{\boldsymbol{x(x-1)}}{\boldsymbol{x(x-1)}}+\frac{2}{x-1}\ \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}}-\frac{3}{x}\ \frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{x-1}}$$

$$\frac{x^2\,(x-1)+2x-3(x-1)}{x(x-1)}$$

$$\frac{x^3-x^2+2x-3x+3}{x(x-1)}$$

$$\frac{x^3-x^2-x+3}{x(x-1)}$$

Ej. N°31: unificar los denominadores $\frac{2}{x-1}-\frac{3}{(x-1)^2}$

El segundo denominador es múltiplo del primero, por lo tanto es el mcm. Una manera abreviada, es multiplicar a cada numerador por "lo que le falta", a su denominador correspondiente, para llegar al denominador común.

$$\frac{2\,(x-1)-3}{(x-1)^2}$$

$$\frac{2x-2-3}{(x-1)^2}$$

$$\frac{2x-5}{(x-1)^2}$$

Ej. N°32: unificar los denominadores $\frac{x}{2(x^2-1)}-\frac{1}{x^2-x-2}$

No se ve con claridad qué factores tienen en común, por lo cual habrá que factorear ambos denominadores.

$$2(x^2-1) = 2(x+1)(x-1)$$

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

Por lo tanto el mcm será el producto:

$$2(x+1)(x-1)(x-2)$$

Ya podemos reescribir la expresión con un denominador unificado.

$$\frac{x}{2(x^2-1)}\frac{\boldsymbol{(x-2)}}{\boldsymbol{(x-2)}} - \frac{1}{(x^2-x-2)}\frac{\boldsymbol{2(x-1)}}{\boldsymbol{2(x-1)}}$$

$$\frac{x^2-2x-2(x-1)}{2(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{x^2-2x-2x+2}{2(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{x^2-4x+2}{2(x+1)(x-1)(x-2)}$$

Unificar los siguientes denominadores:

3.24) $\frac{-1}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}$

R : $\frac{-x+1}{(x+2)^2}$ gp

3.25) $\frac{z}{z+2} + \frac{2}{z-1}$

R : $\frac{z^2 + z + 4}{(z+2)(z-1)}$ gp

3.26) $-y + \frac{y}{z+2} + \frac{2}{y}$

R : $\frac{-y^3 - y^2 + 2y + 4}{y\,(y+2)}$ gp

3.11 Mezcla de problemas diversos

3.27) Hallar el polinomio c(x) llamado “cociente”, y el polinomio r(x) “resto” de dividir $p(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 5x$ por el polinomio $d(x) = x^2 - 3x + 1$. Luego, determine las constantes $k \neq 0$; $h \neq 0$ tales que el polinomio $t(x) = r(x) + k\,x^2$ tenga dos raíces reales distintas, y el polinomio $q(x) = c(x) + h$ tenga un raíz real doble.

R : $k < 121/20$ $h = 21/4$ P1.T3.1410

3.28) Dado el polinomio $p(x) = \frac{1}{k}x^2 - 5\,x + 2\,k$ determinar el valor no nulo de k, si se sabe que el doble de la suma de las raíces del polinomio es igual al producto de dichas raíces.

R : k = 5 LT-TP3-8.2

3.29) Sea la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0 \;\; (con\; a \neq 0)$ con soluciones x_1 y x_2 ambos números reales, demostrar que x_1 y x_2 cumplen con las siguientes propiedades:

a) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ b) $x_1 \,.\, x_2 = \dfrac{c}{a}$

R : se demuestra con procedimientos analíticos matemáticos LT-TP3-14

3.30) Para los siguientes casos, y por procedimientos analíticos, hallar dos números tales que su suma sea "s" y su producto sea "p":

a) s = 2 ∧ p = 20
b) s = 12 ∧ p = -64
c) s = 5 ∧ p = -50
d) s = -4 ∧ p = -21
e) s = 3 ∧ p = 0
f) s = 0 ∧ p = -4
g) s = 6 ∧ p = 9

R : a) sin solución real b) $\{-4\,;16\}$ c) $\{-5\,;10\}$ LT-TP3-15
d) $\{-7\,;3\}$ e) $\{0\,;3\}$ f) $\{-2\,;2\}$ g) $\{3\}$ y agregados gp

3.31) La suma de las soluciones de la ecuación $x^2 + b\,x + c = 0$ es14, por otra parte, el producto de las mismas es 64. Hallar el menor valor x que hace verdadera la ecuación $x^2 + bx + c = 2x$

R : 8 R1.campus.21.02

3.32) Hallar el valor k, para que el polinomio de la siguiente ecuación tenga raíz doble:

$5\,k\,x^2 - (2k + 10)\,x + 4 = 0$

R : k = 5 LT-TP3-16.1

3.33) Dados los siguientes polinomios: $p(x) = 6x^2 - 24x - 270$ $q(x) = x^2 - 2x - 35$

a) Hallar, para ellos, su mínimo común múltiplo m(x).
b) Hallar el resto de dividir el polinomio m(x) por $(3x^2 + 1)$.

R : $m(x) = 6x^3 - 66x^2 - 102x + 1890$ $r(x) = -104x + 1912$ pex

3.34) Hallar los coeficientes a, b, c, d, sabiendo que el polinomio:

$p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + cx + d$

Es divisible por (x-3), también p(1)=18, y sabiendo que -2 es raíz doble de p(x).

R : a = -1 b = -1 c = 8 d = 12 R1.T3.20.02

3.35) Dado el polinomio $p(x) = (x+2)\,(x^2 + kx + u)$, y sabiendo que la suma de sus raíces es (– 6) y el producto de sus raíces es 18:

a) Hallar los valores de k y de u.
b) Hallar p(x)

R : a) k = 4 u = – 9 b) $x^3 + 6\,x^2 - x - 18$ P1.campus.22.02 / mod gp

3.36) Simplificar $\frac{y^3+y^2+y+1}{y^2+y}$ LT-TP3-7.3 R: $\frac{y^2+1}{y}$

3.37) Simplificar: LT-TP3-10 R: $\frac{1}{y-1}$

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{3}{1-y^2}+\frac{2}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right) / \frac{1}{-y^2-y}$$

4. ECUACIONES

TEMA EXPLICADO EN LOS VIDEOS:

1.5.- Ecuaciones **(parte 1)**



https://youtu.be/3IskIxvBMJ0

1.5.- Ecuaciones**(parte 2)**



https://youtu.be/vpjgIDOFx-U

4.1 Teoría básica y ejemplos

A las expresiones algebraicas (números y letras), vamos a tomarlas de a dos, y las vamos a relacionar entre sí, mediante algún símbolo (igual, menor, mayor, desigual). Previamente haremos algunas definiciones pertinentes.

Una expresión algebraica (ver 1.5) puede estar relacionada con otra expresión algebraica, mediante alguna de las formas siguientes a, b, c ó d.

a.- Ecuación: una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en la que hay una o varias incógnitas, y que es verdadera según el/los valores que adopten las incógnitas. Las ecuaciones se resuelven. Resolver una ecuación significa hallar el conjunto solución de la misma (incógnitas que la hacen verdadera).

Ej. N°1:

$$4x + 2y = 7$$

$$5x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\frac{2}{z} = 5 + \frac{4}{3z}$$

$$2\, sen\, x = 1 + \cos x$$

$$-log\, x + 3\sqrt{x} = 2$$

b.- Identidad: una identidad es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que es verdadera siempre, para todos los valores de las variables permitidos por la igualdad. Las identidades se demuestran, no se resuelven. No tienen conjunto solución. No buscamos en ellas "despejar" una incógnita.

Ej. N°2:

$$5 = 5$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{2x+1}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}$$

c.- Inecuación: una inecuación es una relación mayor (>), menor (<), mayor o igual (≥), o menor o igual (≤), entre dos expresiones algebraicas. Ver capítulo 5.

Ej. N°3:

$$x > 5 + 2x$$

$$-3x < x^2 + 9$$

$$sen\ x \geq 1 - cos\ x$$

$$4\ log\ x \leq -3 + \sqrt{x}$$

d.- Desigualdad: es desigualdad cuando tenemos dos expresiones algebraicas que son desiguales; ellas irán conectadas por el símbolo ≠.

Ej. N°4:

$$x + 3 \neq 5$$

$$-2x \neq x^2 - 1$$

e.- Primer miembro y segundo miembro: se llama primer miembro, a la expresión a izquierda del igual o símbolo de ecuación, inecuación, identidad o desigualdad, y segundo miembro a la expresión a derecha. Tienen primer y segundo miembro todas las expresiones anteriores: a, b, c y d.

Ecuaciones es uno de los temas más importantes de la matemática básica. Si hubiera que reducir matemática básica a una única cosa importante, eso sería **resolver ecuaciones**. Es esencial saber, al trabajar con ecuaciones, que:

LAS ÚNICAS OPERACIONES VÁLIDAS PERMITIDAS CON ECUACIONES, ES HACERLE OPERACIONES SIMULTÁNEAS MIEMBRO A MIEMBRO:	-SUMAR m.am. -RESTAR m.a.m. -MULTIPLICAR m.am. -DIVIDIR m.a.m.

Habrá formas abreviadas o simplificadas, habrá "atajos", pero en realidad, siempre estamos haciendo esto. Y cuidado, porque muchas veces, esas acciones abreviadas o atajos, si vienen como "receta", no se entiende bien por qué se hace la receta, y termina causando confusión, e incluso obligan a recordar recetas de memoria, lo que es más complicado que saber hacer las cosas y por qué. Hacer la única acción válida permitida, aparte de ser lo correcto, es más fácil, y no obliga a recordar recetas.

Hacer operaciones simultáneas miembro a miembro (m.a.m.), es fabricar **ecuaciones equivalentes**, es decir la ecuación adopta "otra forma", pero tiene las mismas soluciones:

Ej N°5: puede sumarse a ambos miembro de una ecuación, cualquier número real.

$x + 3 = 4$	una ecuación dada
$x + 3 + \mathbf{5} = 4 + \mathbf{5}$	+5 m.a.m.
$x + 8 = 9$	ecuación equivalente

Notemos que mediante las operaciones m.a.m. podemos aislar la incógnita x:

$x + 8 = 9$	
$x + 8 - \mathbf{8} = 9 - \mathbf{8}$	nueva ecuación equivalente (-8) m.a.m.
$x = 1$	donde está aislada x, que es la solución
$S = \{ 1 \}$	el conjunto solución

Hemos resuelto la ecuación haciendo operaciones miembro a miembro, y generando ecuaciones equivalentes, hasta llegar a la ecuación x = 1 que es la solución.

RESOLVER UNA ECUACIÓN ES GENERAR SUCESIVAS ECUACIONES EQUIVALENTES, HASTA AISLAR LA INCÓGNITA, lo que se llama habitualmente (jerga) "despejar".

Ej N°6: puede multiplicarse ambos miembro de una ecuación, por un número real.

$2x + 4 = 3$	la ecuación dada
$2x + 4 - \mathbf{4} = 3 - \mathbf{4}$	-4 m.a.m.
$2x = -1$	ecuación equivalente
$2x \,.\, \mathbf{\tfrac{1}{2}} = -1 \,.\, \mathbf{\tfrac{1}{2}}$	. ½ m.a.m.
$x = -\tfrac{1}{2}$	ecuación equivalente, que aísla x
$S = \{ -1/2 \}$	conjunto solución

Ej N°7: ecuación donde x aparece en ambos lados, en el numerador

En los ejemplos anteriores, la incógnita sólo aparecía una vez, sólo fue cosa de aislarla hasta lograr la ecuación equivalente, que sea solución. Veamos ahora un ejemplo en donde x aparece en ambos lados:

$2x + 1 = 5 - 3x$	una ecuación dada

Pero x tiene que estar sólo una vez, para eso se necesita "juntarlas" a todas las x. De un lado tenemos 2x, del otro lado, 3x. Se trata simplemente de repetir lo ya hecho, o sea, por ejemplo, sumar 3x miembro a miembro:

$2x + 1 + \mathbf{3x} = 5 - 3x + \mathbf{3x}$	+3x m.a.m.
$5x + 1 = 5$	ecuación que logra una sola x
$5x + 1 - \mathbf{1} = 5 - \mathbf{1}$	-1 m.a.m.
$5x = 4$	ecuación equivalente
$5x \,.\, \mathbf{1/5} = 4 \,.\, \mathbf{1/5}$	. 1/5 m.a.m.
$x = 4/5$	ecuación equivalente, con el resultado

S = { 4/5 } conjunto solución

Ej N°8: ecuación donde x aparece tanto en el numerador, como en el denominador.

$\frac{x+5}{x-1} = 2$ la ecuación dada

Como en el ejemplo 3, tenemos que "juntar" las dos x, para después aislar x.

$\frac{x+5}{x-1}\,(\boldsymbol{x-1}) = 2\,(\boldsymbol{x-1})$. (x-1) m.a.m.

Llegado este punto, (x-1) aparece en el primer miembro, tanto en el numerador, como también en el denominador, por lo tanto, a menos que eso valga cero (por denominador, está **prohibido que x = 1**), podemos hacer la cuenta y nos dará uno:

$(x+5)\,.\,1 = 2\,(x-1)$

Y como 1 es el elemento neutro de la multiplicación, es lícito no escribirlo:

$x+5 = 2\,(x-1)$

El siguiente paso que tenemos para "juntar" las x, es distribuír el segundo miembro:

$x+5 = 2x-2$

Conviene ahora poner todas las x en el segundo miembro (para que queden en positivo):

$x+5-\boldsymbol{x} = 2x-\boldsymbol{x}-2$ -x m.a.m.
$5 = x-2$ ecuación equivalente
$x-2 = 5$ ← invertimos los miembros de la ecuación
$x-2+\boldsymbol{2} = 5+\boldsymbol{2}$ +2 m.a.m.
$x = 7$ solución
S = { 7 } conjunto solución

Ej N°9: ecuación donde x está en dos denominadores distintos.

$\frac{2}{x}+\frac{4}{3x} = 5$ la ecuación dada (prohibido que x = 0)

$\frac{2\,.\,3+4}{3x} = 5$ el denominador común es 3x (recordemos que el denominador común es el mcm de ambos)

$\frac{10}{3x} = 5$ la cuenta del numerador

$\frac{10}{3x}\,.\,\boldsymbol{3x} = 5\,.\,\boldsymbol{3x}$. 3x m.a.m.

$10 = 15x$ la cuenta 3x/3x del primer miembro

$x = 2/3$	. 1/15 m.a.m.
S = { 2/3 }	conjunto solución

Ej N°10: veamos otra ecuación en donde x también está en dos denominadores distintos, más difícil que el ejemplo 9.

$\frac{5}{x-1} + \frac{3}{x} = 4$	la ecuación dada para resolver
$\frac{5x + 3(x-1)}{x\,(x-1)} = 4$	el denominador común es x(x-1), o sea es el mcm de los denominadores, que en este caso es el producto (no siempre lo es)
$\frac{5x + 3x - 3}{x\,(x-1)} = 4$	desarrollando el numerador
$\frac{8x - 3}{x\,(x-1)}\,\boldsymbol{x\,(x-1)} = 4\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{(x-1)}$	multiplicando m.a.m. por x(x-1)
$8x - 3 = 4x(x-1)$	la división del primer miembro da como resultado 1 (el elemento neutro)
$8x - 3 = 4x^2 - 4x$	desarrollando el 2° miembro
$8x - 3 - \boldsymbol{8x} = 4x^2 - 4x - \boldsymbol{8x}$	-8x m.a.m.
$-3 = 4x^2 - 12x$	Desarrollando
$4x^2 - 12x + 3 = 0$	ecuación de segundo grado a resolver, siempre que x no sea ni 1 ni 0
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	la fórmula resolvente a usar es (lo veremos en el capítulo 7.2.3)
$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\,.\,4\,.\,3}}{2\,.\,4}$	resultados finales obtenidos de acá:
$S = \left\{-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right\}$	resultados finales que no sean los valores prohibidos de x (ni 1 ni 0)

Conclusiones:

1) Sólo se pueden hacer **operaciones simultáneas miembro a miembro**. Todo lo demás, pueden ser atajos, que en el fondo, implícitamente son esto.
2) Resolver una ecuación es generar **ecuaciones equivalentes** (mismas soluciones), hasta llegar a la ecuación final en donde aparece aislada la solución, lo que puede ser sólo un número, o varios números (como en el Ej. 10) lo que llamaremos siempre **conjunto solución**. Se generan las ecuaciones equivalentes mediante las ope-

raciones producto por un número (distinto de cero), o suma de un número.

3) A toda ecuación, hay que estudiarle primero las **condiciones de existencia (CE)**, es decir, los valores permitidos en la expresión original, tanto del 1° como del 2° miembro. Si expresamos las condiciones de existencia como un conjunto, también puede llamarse "conjunto de existencia". Al resolver, de los valores encontrados deben excluírse los prohibidos por las CE.

4.2 Ecuaciones de 1° grado con una incógnita

4.2.1 Definición, resolución y clasificación

También llamadas "ecuaciones lineales", porque su representación gráfica es una recta. Una ecuación de 1° grado con una incógnita es un polinomio de 1° grado igualado a cero: $a_1 x + a_0 = 0$

Por facilidad escribiremos: $\alpha x = \beta$

De fácil solución pues basta con un paso para aislar x: $x = \beta / \alpha$

Clasificaremos las soluciones de una ecuación de 1° grado, en las tres siguientes variantes que podrían ocurrir:

$\alpha \neq 0$	$\wedge$	$\beta \in \mathbb{R}$	$\Rightarrow$	x tiene solución única $S = \{ \beta/\alpha \}$ **ECD: ecuación compatible determinada**
$\alpha = 0$	$\wedge$	$\beta = 0$	$\Rightarrow$	$0 . x = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$ **ECI: ecuación compatible indeterminada** x puede adoptar cualquier valor $S = \mathbb{R}$
$\alpha = 0$	$\wedge$	$\beta \neq 0$	$\Rightarrow$	$0 . x = \beta \quad \Rightarrow \quad 0 = \beta$ y esto es una contradicción porque habíamos partido de que $\beta \neq 0$ **EI: ecuación incompatible S = ∅**

4.2.2 Resolver ecuaciones de 1° grado

Hallar el conjunto solución, expresando el resultado en forma exacta.

4.1) $4\,(x - 11) = -6\,(2 - x)\; - 3\,x$ gp R: S = { 32 }

4.2) $y + 7 = 2(y + 1)\; - 3(y - 1)$ gp R: S = { -1 }

4.3) $2x + 7 = 5(x - 4) - 3x$ gp R: EI (ecuación incompatible) S = { }

4.4) $\frac{z + 11}{4} - \frac{z - 1}{36} = \frac{z + 3}{9}$ gp R: S = { -22 }

4.5) $\dfrac{3x-1}{7} - \dfrac{2-4x}{3} = \dfrac{-5x-4}{5} + \dfrac{5}{2}x$ gp R: S = { 2/55 }

4.6) $6\left(\dfrac{x+1}{8} - \dfrac{x-3}{16}\right) = 3\left(\dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}\right)$ gp R: S = { 7/5 }

4.7) $\dfrac{3}{5}\left[x - \left(1 - \dfrac{x-2}{3}\right)\right] + 1 = x$ gp R: S = { 0 }

4.8) $2 - \left[-3(x+1) - \dfrac{x-3}{2}\right] = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{5x-3}{12} + 3x$ gp R: S = { -13 }

4.9) Dividir el número 11 en dos partes, tales que 7/5 de una parte, más 4/3 de la otra, sumen 15

R : 5 y 6 gp

4.10) Gabriela compra 6 kg de ciruelas para hacer mermelada. Le quita los carozos, que representan un cuarto del peso inicial. A la pulpa resultante, añade luego azúcar igual al peso de la pulpa. Por la cocción, la mezcla pierde 1/5 de su peso. ¿Cuántos potes de 375 g se pueden llenar con el dulce de ciruelas elaborado?

R: 19 potes llenos LT-TP2-6

4.3 Ecuaciones de 2° grado con una incógnita

4.3.1 Definición, resolución y clasificación

También llamadas "ecuaciones cuadráticas". Una ecuación de 2° grado con una incógnita es un polinomio de 2° grado igualado a cero:

$$a_1\, x^2 + a_1\, x + a_0 = 0$$

La costumbre que se ha adoptado es escribir los coeficientes como:

$$a\, x^2 + b\, x + c = 0$$

En donde:

a : coeficiente principal

b : coeficiente de primer grado (o lineal)

c : término independiente

n = 2 (grado 2 ; 2 soluciones)

x_1 ; x_2 son las soluciones de la ecuación, y las raíces del polinomio

forma factoreada: $a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = 0$

La solución consiste en llevar el polinomio a un trinomio cuadrado perfecto (TCP), y luego factorear el TCP, lo que puede hacerse de dos formas, (1) transformar la ecuación, lo que se llama "completar cuadrados", (2) usar la "fórmula resolvente":

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4.3.2 Resolver ecuaciones de 2° grado con una incógnita

ACTIVIDAD: Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones de 2° grado, expresando el resultado en forma exacta. Saber por fórmula resolvente, y también completando cuadrados. Si la ecuación de segundo grado es incompleta, resolver sin usar ninguno de los dos métodos mencionados.

4.11) $x\,(x - 14) + 11\,(3 + x) = 11\,x$

R: S = { 3 ,11 } LT-cap 3

4.12) Dada la ecuación de segundo grado $6\,x^2 + h\,x + k = 0$. Encontrar las constantes h y k (no nulas), tales que el conjunto solución de la ecuación es: $\left\{\frac{h}{6}\ ;\ \frac{k}{6}\right\}$

R: h=6 , k=-12 P1.T3.1410

4.13) $x^2 - 6x + 5 = 0$ gp R: S = { 1 ; 5 }

4.14) $3\,x^2 - 30\,x - 33 = 0$ gp R: S = { -1 ; 11 }

4.15) $2\,x^2 + 2\,x - 4 = 0$ gp R: S = { -2 ; 1 }

4.16) $x^2 + x - 1 = 0$ gp R : S = $\left\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}),\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right\}$

4.17) $3\,x^2 + 2\,x - 1 = 0$ gp R : S = { -1 , 1/3 }

4.18) $2y - 3 = 1 - 3y + y^2$ gp R: S = { 1 , 4 }

4.19) $z^2 + (7 - z)^2 = 25$ web/gp R: S = { 3 , 4 }

4.20) $-9\,x^2 = 7\,x$ web/gp R: S = { $-7/9$, 0 }

4.4 Despejar una variable

Aislar la variable que se indica, en las siguientes ecuaciones. Hacerlo justificando cada paso que se da, con operaciones matemáticas lícitas miembro a miembro.

4.21) Despejar b : $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ gp R: $b = \frac{a\,c}{c-a}$

4.22) Despejar x : $y = \frac{x+1}{2\,x-3}$ gp R: $x = \frac{3\,y+1}{2\,y-1}$

4.23) Despejar x : y = 2 x + 3 gp R: $x = \frac{1}{2}(y-3)$

4.24) Despejar y : $\frac{3}{8}y + \frac{7}{3} = \frac{1}{2}$ gp R: $y = -\frac{44}{9}$

4.25) Despejar v : $x = \frac{y-v}{z}$ gp R: $v = y - x\,z$

4.26) Despejar y : $\frac{1}{z} = \frac{y+1}{3\,b}$ gp R: $y = \frac{3\,b-z}{z}$

4.27) Despejar g : $T = 2\,\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ gp R: $g = \frac{4\,\pi^2 L}{T^2}$

4.28) Despejar c : $z = \frac{b-a}{c^2-d^2}$ gp R: $c = \pm\sqrt{\frac{b-a}{z} + d^2}$

4.29) Despejar T_C : $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$ gp R: $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$

4.30) Despejar z : $y = \sqrt{z-1}$ gp R: $z = y^2 + 1$

4.5 Porcentajes

4.5.1 Parte porcentual

Consiste en expresar una cantidad A, *en partes de otra cantidad B*. Lo hacemos dividiendo A/B, lo que se dice "razón de A sobre B" o también "A en partes de B".

Ej N°11: Expresar A = 150 en partes de B = 75: A/B = 2
Lo que se expresa "A es dos veces B".

Ej N°12: Expresar A = 60 en partes de B = 140: A/B = 60/140 = 1/7
Lo que se expresa "A es 3/7 partes de B".

Ej N°13: Expresar A = $ 15.000 en partes de B = $ 45.000: A/B = 1/3
Lo que se expresa "A es 1/3 de B".

Expresar *"en parte porcentual"* es lo anterior, pero *simulando que el valor de referencia en el denominador (B) vale 100*, con lo cual estaremos expresando algo en partes de 100. De los ejemplos anteriores, por "regla de tres" o por proporciones:

Ej. N°14-a: A=150 B=75
A/B . 100% = 200 %
y se dice "A es el 200% de B" (porque si B fuese 100, A sería 200)

Ej. N°14-b: A=60 B=140
A/B . 100% = 60/140 . 100 % ≅ 43%
y se dice "A es el 43% de B" (porque si B fuese 100, A sería 43)

Ej. N°14-c: A=$15.000 B=$45.000

A/B . 100% = 15000/45000 . 100% ≅ 33%

y se dice "A es el 33% de B" (porque si B fuese 100, A sería 33)

4.5.2 Fracciones porcentuales

Consiste en escribir la fracción A/B del punto anterior, cuando nos informan el porcentaje que es A del valor B, para poder usarla luego dentro de una ecuación.

Ej. N°15: crear una fracción porcentual que, a partir de un precio, obtenga el 25% de descuento.

Descto = 25/100 . Precio

La fracción porcentual pedida es 25/100

Ej. N°16: crear una fracción porcentual que obtenga el precio final de venta, cuando se otorga el 17% de descuento sobre el precio de lista de un producto.

Pfinal = Plista – descto = Plista – 17/100 Plista = 83/100 Plista

La fracción porcentual pedida es 83/100

Ej. N°17: crear una fracción porcentual que obtenga el precio final de venta, cuando hubo un aumento del 10% en el precio de lista de un producto.

Pfinal = Plista + Plista 10/100 = 110/100 Plista

La fracción porcentual pedida es 110/100

4.5.3 Variaciones porcentuales

Cuando "algo" sea una magnitud de la física, un precio, o cualquier cosa cuantificable, pasa de un valor inicial a un valor final, decimos que tuvo una *variación* o *incremento*.

Variación nominal. Es la resta del valor final x_f, menos el valor inicial x_0. Esto se usa mucho en ciencias e ingeniería.

$\Delta x = x_f - x_0$ -tiene signo
-tiene unidades

Ej. N°18: El precio del tomate varió desde un valor inicial ($5,00) a un valor final de $5,80. La variación nominal es:

$\Delta p = p_f - p_0$ = $5,80 - $5,00 = $ 0,80

Variación relativa. Es la variación nominal, expresada en partes del valor inicial. Sirve para evaluar si es mucho o es poco, lo que varió. La variación relativa se define:

$$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{x_f - x_0}{x_0}$$ -tiene signo
-no tiene unidades

Ej. N°19: hallar la variación relativa del Ej. 14.

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{p_f - p_0}{p_0} = \frac{\$\ 0{,}80}{\$\ 5} = 0{,}16$$

Quiere decir que si el precio inicial hubiese sido de $1,00 entonces ahora el precio final sería $1,16, lo que sirve para comparar.

Variación relativa porcentual. Es la variación relativa expresada en porcentaje, tal como hemos hecho en el tema anterior "parte porcentual", eso es:

$$\frac{\Delta x}{x_0}\% = \frac{x_f - x_0}{x_0}\ 100\%$$

-tiene signo

-no tiene unidades

Ej. N°20: hallar la variación relativa porcentual del Ej. 15.

$$\frac{\Delta p}{p_0} 100\% = 0{,}16\,.\,100\% = 16\%$$

Quiere decir que si el precio inicial hubiese sido de $100 entonces ahora el precio final sería $116, lo que sirve para comparar y es más cómodo.

La variación relativa porcentual se suele usar en la **tolerancia** de piezas de fabricación industrial. Por ejemplo, los neumáticos automotor FATE (industria argentina) modelo SENTIVA AR-360, de 165/70 R13, tienen dimensiones, según sus especificaciones publicadas:

Anchura: 170 mm ± 4%
Diámetro: 562 mm ± 1,5%

En donde el porcentaje indicado es la tolerancia, porque ninguna máquina, operario, ni procedimiento, pueden garantizar una dimensión siempre única y exacta, y para cubrir las irregularidades nos garantiza que su anchura estará entre 163,2 mm y 176,8 mm, y que su diámetro estará entre 553,57 mm y 570,43.

ACTIVIDAD: **resolver los siguientes problemas** sobre porcentajes.

4.31) Si un precio aumentó el 50% y ahora es de $ 300, ¿cuál era el precio original? gp R: $ 200

4.32) Si el barril de petróleo aumentó de U$S 28 a U$S 45, ¿cuál fue el porcentaje de variación del barril? gp R: 60,7 %

4.33) El 30 de marzo, un monitor valía € 500. Si el 30 de abril su precio es de € 475, ¿cuál fue el porcentaje de variación mensual de dicho precio? gp R: -5 %

4.34) Si en un cuatrimestre, un curso tenía 10 estudiantes, y dicha cantidad varió en un 200% el siguiente cuatrimestre, la nueva cantidad de estudiantes es … gp R : 30 estudiantes

4.35) Un automóvil vale $ 50.000 y luego su precio disminuye un 40%. Si nuevos cambios hacen que este último precio vuelva a aumentar en un 40%, ¿cuál es el valor final? gp

R : $ 42.000

4.36) La temperatura de una sustancia es de 24,2°C. ¿En qué porcentaje debe aumentar la misma, para alcanzar la temperatura del cuerpo humano (36°C)? gp

R : 48,8 %

4.37) La tolerancia en el diámetro de un neumático de 60 cm de diámetro promedio, es del 5%. ¿Cuál es el valor máximo que puede tener el diámetro? gp

R : 63 cm

4.38) Una persona necesita comprar un router que tiene un precio de $ 215, pero cuenta con tan sólo $ 195,65 ¿Qué descuento necesita pedir como mínimo? gp

R : el descuento mínimo es del 9%

4.39) Un gerente de ventas otorga el 15% de descto a un cliente. Obtener una fracción que, al ser multiplicada por el precio de lista, obtenga el precio final con descto. gp

R : 85/100

4.40) Juan hace una compra por los 2/3 del dinero que tenía, pero sobre ese valor le hacen un descuento del 15%. ¿Cuánto dinero tenía si después de la compra le quedan $260? LT-TP2-16

R : $ 600

4.41) En una bolsa de 200 caramelos, hay 110 de fruta, el resto de menta. ¿Cuántos caramelos de fruta hay que agregar, para que los caramelos de fruta pasen a ser el 70% del total? LT-TP2-11

R : agregar 100 caramelos de fruta

4.42) Pedro es titular del 40% de una empresa, Juan del 25%, Miguel del 15%, y Pepe del 20%. En esas condiciones, Miguel vende su parte a los otros tres socios, quienes deciden comprarla en porcentajes tales, que mantengan las proporciones iniciales. ¿Cuáles serán los nuevos porcentuales de propiedad para Pedro, Juan y Pepe? gp

R : Pedro 47,06%
Juan 29,41%
Pepe 23,53%

4.6 Ecuaciones cúbicas y bicuadráticas

Hallar el conjunto solución, expresando el resultado en forma exacta.

4.43) $2\,z^3 - 162\,z = 0$ web/gp R: $S = \{-9\,, 0\,, 9\}$

4.44) $x^3 - 3x^2 - 7x + 21 = 0$ P1.T3.20.02 R: $S = \{3\,, -\sqrt{7}\,, \sqrt{7}\}$

4.45) $4\,x^4 + 15\,x^2 - 4 = 0$ LT-cap 3 R: S = { -1/2 ; 1/2 } y dos no reales

4.46) $-3\,x^4 - 2\,x^2 + 5 = 0$ gp R: S = { -1 , 1 } y dos no reales

4.47) $-\,x^4 - 3\,x^2 = -18$ web/gp R: $S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ y dos no reales

4.48) $6\,x^2 - 8 = x^4$ web/gp R: S = $\{\,2\,,-2\,,\sqrt{2}\,,-\sqrt{2}\,\}$

4.49) $x^4 - 10\,x^2 + 9 = 0$ web/gp R: S = $\{-3,-1\,,1\,,3\,\}$

4.50) $x^2 = \dfrac{x^2 + 12(x^2-3)}{x^2}$ web/gp R: S = $\{-3,-2\,,2\,,3\,\}$

4.7 Ecuaciones con módulo

Hallar el conjunto solución de las ecuaciones con módulo, significa desglosar los módulos que ellas tengan, considerando todos los casos posibles que tiene todo módulo (mayor o igual a cero, o menor a cero) y combinando con todos los demás módulos presentes en la ecuación.

Ej. N°21: hallar el conjunto solución de: $|-3x| - 1 = |2x - 3| + 2x$

Habiendo dos módulos, se presentan cuatro combinaciones posibles, que son los siguientes cuatro casos:

Caso	-3x	2x-3	Valores permitidos para cada caso
I	≥0	≥0	$-3x \geq 0 \;\wedge\; 2x - 3 \geq 0$ $x \leq 0 \;\wedge\; x \geq 3/2$ Esto es falso por lo tanto ningún valor de x es permitido: ∅
II	≥0	<0	$-3x \geq 0 \;\wedge\; 2x - 3 < 0$ $x \leq 0 \;\wedge\; x < 3/2$ $x \leq 0$
III	<0	≥0	$-3x < 0 \;\wedge\; 2x - 3 \geq 0$ $x > 0 \;\wedge\; x \geq 3/2$ $x \geq 3/2$
IV	<0	<0	$-3x < 0 \;\wedge\; 2x - 3 < 0$ $x > 0 \;\wedge\; x < 3/2$ $0 < x < 3/2$

Dentro de esos conjuntos tiene que estar la solución hallada para cada caso, o sea:

Caso	Resolución
II	$-3x - 1 = 3 - 2x + 2x$ $x = -4/3$ (valor permitido pues está dentro de $x \leq 0$)
III	$3x - 1 = 2x - 3x + 2x$ $x = 2$ (valor permitido pues está dentro de $x \geq 3/2$)

IV	3x – 1 = 3 – 2x + 2x x = 4/3 (valor permitido pues está dentro de 0 < x < 3/2)

Por lo tanto el conjunto solución es: S = { – 4/3 ; 4/3 ; 2 }

Ej. N°22: conociendo que | x – y | = 6, hallar el menor valor del producto x . y

Aplicando la definición de módulo a la información recibida:

x – y = 6 ⊻ – (x – y) = 6

y = x – 6	y = x + 6
x . y = x (x – 6)	x . y = x (x + 6)
x . y = x^2 – 6 x	x . y = x^2 + 6 x

Entonces el producto x . y será una u otra función cuadrática, de concavidad positiva, por lo tanto su mínimo estará en el vértice:

x_v = –b/2a = 3	x_v = –b/2a = –3
y_v = x – 6 = 3	y_v = x + 6 = 3

Leyendo ambos casos vemos que el mínimo producto x . y es (–9).

ACTIVIDAD: hallar el conjunto solución de las ecuaciones con módulo siguientes.

4.51) | x^2 – 6 x + 5 | + 2 x = 5 LPE-114 R : S = $\{0\ ; 4-\sqrt{6}\}$

4.52) | 3 x – 2 | = 4 + 2 x gp R : S = $\{-2/5\ ; 6\}$

4.53) | 5 x | – | x – 2 | = – 4 x gp R : S = $\{1/5\}$

4.54) |– 2 x + 3 | = | x – 1 | gp R : S = $\{4/3\ ; 2\}$

4.55) | 2 x | = | x – 3 | + 2x gp R : S = $\{-1\ ; 3\}$

4.8 Ecuaciones racionales

Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones racionales, expresando el resultado en su forma exacta.

4.56) $\frac{4}{x-2}-\frac{5}{x+2}=\frac{20}{x^2-4}$ LPE-6 R : S = ∅

4.57) $\frac{x+5}{x+1}+\frac{3x+1}{x^2+3x+2}=\frac{5}{2}$ LPE-324 R : S = $\left\{-\frac{4}{3}\ ; 3\right\}$

4.58) $\frac{x-5}{x+4}-\frac{x+1}{x-2}=\frac{12x-46}{x^2+2x-8}$ gp R : S = $\left\{\frac{13}{6}\right\}$

4.59) $\frac{6-x}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x+2}=\frac{2}{5-x}$ LT-TP3-30.1 R : S = $\left\{\frac{6}{11}\right\}$

4.9 Ecuaciones irracionales

Ej. N°23: [P1.T1.20.02] Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación, que tiene una expresión irracional (raíz cuadrada).

$$3 - x = \sqrt{x - 1}$$

La resolución debe comenzar analizando los valores admitidos por la expresión:

$3 - x \geq 0 \quad \wedge \quad x - 1 \geq 0$	Son las condiciones de existencia
$x \leq 3 \quad \wedge \quad x \geq 1$	Aplicando propiedades de inecuaciones
$CE = [\,1\,;\,3\,]$	El conjunto de valores permitidos, dentro del cual deberá estar el conjunto solución
$9 - 6x - x^2 = x - 1$	La resolución comienza elevando al cuadrado miembro a miembro
$x^2 + 7x - 10 = 0$	Ecuación de 2° grado
Raíces del polinomio: 2 ; 5	Pero el 5 no está permitido en las CE
S = { 2 }	Conjunto solución

ACTIVIDAD: Hallar el conjunto solución, expresando el resultado en su forma exacta.

4.60)	$\sqrt{2x+11} - x - 4 = 0$	LPE-14	R : S = { -1 }
4.61)	$\sqrt{x-3} - \sqrt{x-4} = -1$	LPE-28	R : S = ∅
4.62)	$\sqrt{2+\sqrt{x}} + \sqrt{2-\sqrt{x}} = \sqrt{x}$	LT-TP3-31.1	R : S = { 4 }
4.63)	$\sqrt{6x+7} - \sqrt{3x+3} = 1$	LT-TP3-31.2	R : S = $\left\{-1\,;\,\frac{1}{3}\right\}$
4.64)	$\sqrt{x+11} + 1 = x$	pex	R : S = { 5 }
4.65)	$3 - x + \sqrt{x^2 - 16} = 0$	web / gp	R : S = { 25/6 }
4.66)	$7 - x = \sqrt{x-1}$	P1.T1.20.02 / mod gp	R : S = { 5 }
4.67)	$\sqrt{2x+3} + 2 = \sqrt{10x+11}$	R1.T2.20.02	R : S = { 1/2 }

4.10 Mezclas, precios, conteos

4.68) Resolver las ecuaciones de los problemas 1.59 al 1.66

Respuestas:

1.59)	$x = 4$	1.60)	$a = 31$; $j = 19$
1.61)	$h = 10$; $p = 40$	1.62)	$l = 60$; $a = 20$
1.63)	$\alpha = 25$; $\beta = 35$; $u = 5$	1.64)	$n = 83$; $d = 8$; $u = 3$
1.65)	$M = 200$; $m = 120$	1.66)	$D = 5$

4.69) Se dispone de dos soluciones, c/u de las cuales contiene un porcentaje de ácido. Si una solución tiene el 5% de ácido, y la otra el 15%, ¿qué cantidad de c/u debe mezclarse para obtener 20 litros de una solución que contenga 12% de ácido?

R: 6 litros con el 5% de ácido, 14 litros con el 15% de ácido P1.T1.1402

4.70) Se desea mezclar café colombiano cuyo precio es $36 por kg, con café brasileño cuyo precio es $29 por kg.

a) ¿Cuántos kg de c/u hay que usar para obtener 49 kg de una mezcla que valga $30 por kg?

Luego, se observa un aumento de $11 por kg de la mezcla, debido al incremento (x) del precio del café colombiano, y al doble (2x) en el precio del café brasileño.

b) ¿Cuál fue el aumento de cada tipo de café, si las cantidades de kg de cada café no se modifican?

R: a) 7 kg de café colombiano y 42 kg de café brasileño P1.T1.1410
b) El colombiano aumentó $5,92 y el brasileño aumentó $11,84

4.71) Juan compró un pollo de calidad A (menor peso) y pagó $1350. Mario compró un pollo de calidad B (más pesado), y lo pagó $1900. Ambos pollos juntos pesarían un total de 8 kg. El precio de la calidad A por kg es $70 mayor que el B. Se desea saber:

a) Peso de cada uno de los dos pollos comprados
b) Precio por kg de cada calidad

R : a) El pollo de Juan es de 3 kg, el de Mario, 5 kg F.T1.1812
b) la calidad A cuesta $450 el kg, la calidad B cuesta $380 el kg mod.gp

4.72) Un joyero tiene dos barras de aleación de oro, una es de 12 quilates, la otra es de 18 quilates. El oro de 24 quilates es oro puro, el de 12 quilates corresponde a 50% de pureza, y el de 18 quilates es 75% de pureza. ¿Cuántos gramos de cada aleación se deben mezclar, para obtener 10 gramos de oro de 14 quilates?

R : 20/3 g de aleación 12 quilates ; 10/3 g de aleación 18 quilates LPE-120

4.73) El agua para una cabaña se bombea y se deposita en un depósito. Para ello usa dos bombas; una de ellas puede llenar el depósito en 6 horas, la otra en 9 horas. ¿Cuánto tardarán ambas, si trabajan juntas?

R : tardan juntas 3,6 h LT-TP3-19

4.74) Una canilla puede llenar un tanque en tres horas menos que otra canilla, mientras que juntas las dos, llenan el tanque en 4 horas. ¿Cuánto tiempo tarda en llenar el tanque cada canilla individualmente?

R : tardan $6^h\ 46^m$ y $9^h\ 46^m$ LT-TP3-29

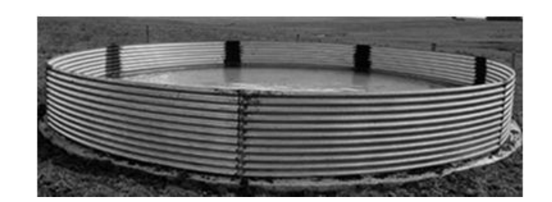
4.75) Una pileta puede vaciarse por medio de una llave de desagüe en $9^h\ 30^m$. También puede llenarse con una canilla en "t" horas. Si abren las dos simultáneamente, el resultado conjunto es que la pileta se llena en $4^h\ 45^m$. Calcular el tiempo "t".

R: $t = 3^h\ 10^m$ pex

4.76) En una fiesta, ya muy pasada de horario, se decide mezclar vino de $13/litro con otro de inferior calidad, que cuesta $8/litro; obteniéndose una mezcla de 200 litros, que costaría $11/litro. ¿Cuántos litros de cada tipo de vino se mezcló?

R: 120 litros de $13/litro con 80 litros de 8/litro web/gp

4.77) Un tanque australiano dispone de dos canillas para ser llenado. Si actuaran individualmente, una de ellas lo llena en tres horas, y la otra en seis horas, hallar en cuánto tiempo llenan el tanque ambas canillas, trabajando simultáneamente.



R : tardan juntas 2 h gp

4.78) Un ganadero vendió una cantidad de vacas por 1200 pesos. Si hubiese pedido la misma suma, por tres vacas menos, habría recibido 20 pesos más por cada vaca. ¿Cuántas vacas vendió, y a qué precio cada una?

R: vendió 15 vacas a 80 pesos cada una LT-TP3-34

4.79) En un campeonato de ajedrez, cada jugador juega dos veces (una con blancas, otra con negras) con cada uno de los demás jugadores. Si en total se juegan 90 partidas en todo el campeonato, ¿cuántos jugadores hay?

R : 10 jugadores LT-TP3-33

4.80) Basado en el problema anterior, encontrar una fórmula que informe la cantidad de diagonales que tiene un polígono regular de "n" lados.

R : $q = \frac{n\,(n-3)}{2}$ gp

4.81) Los precios por unidad de dos sustancias son \$6 y \$10. Hallar qué cantidad de cada sustancia debe mezclarse para obtener 50 unidades de mezcla a \$7,60 c/u.

R: 30 y 20 unidades LT-TP4-14

4.82) El día del parcial de física, se pensó usar "A" aulas para ubicar "a" alumnos. Al ubicar 35 alumnos por aula, quedan 28 alumnos sin aula. Entonces se ubicaron 38 alumnos por aula, quedando 2 asientos vacíos. Hallar A y a.

R: A = 10 aulas ; a = 378 alumnos LT-TP4-15

4.83) Hallar el polinomio de 4° grado que tenga raíces en 0 ; -1 ; 1 y 2, y cuyo coeficiente cuadrático sea 5

R : $p(x) = -5x^4 + 10x^3 + 5x^2 - 10x$ LPE-112

4.84) Sea el polinomio $p(x) = (x - 1)(3x^2 + 21x + 30)$ y la identidad siguiente:

$$\frac{p(x)}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{a\,x + b}{x^2 + 1} + \frac{x + c}{x^2 + 4}$$

Hallar las constantes a, b y c

R : a = 2 b = -16 c = 34 P1.T1.1402

4.85) Dado $p(x) = 2x^4 + 18x^3 + (2a + 12)x^2 - 66x + (18 - 18a)$ determinar a, si se sabe que -3 es raíz doble del polinomio, y factorice en factores primos

R : a = 11 $p(x) = 2(x+3)^2(x-2)(x+5)$ P1.1011

5. INECUACIONES

TEMA EXPLICADO EN EL VIDEO 1.6



https://youtu.be/c1KW1wdoHGU

Saber que inecuaciones es lo definido en 0 punto c. Tener sabidas las siguientes propiedades de las inecuaciones, antes de ir a los problemas. También saber las CE (condiciones de existencia).

Propiedad N°1 – Transitiva

"Si un número real es mayor que otro, y este, a su vez, es mayor que un tercero, entonces, el primero es mayor que el tercero"

En símbolos: $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

Ej N°1: $5 > 2 \wedge 2 > -3 \Rightarrow 5 > -3$

Propiedad N°2 – Suma miembro a miembro

"Dada una inecuación, se puede sumar a cada miembro de la misma, cualquier número, sin que se altere el sentido de la inecuación"

En símbolos: $a > b \;;\; c \Rightarrow a + c > b + c$

Ej N°2: $9 > 7 \;;\; -3 \Rightarrow 9 - 3 > 7 - 3$

$6 > 4$

Propiedad N°3 – Multiplicación miembro a miembro

a) "Dada una inecuación, se puede multiplicar a cada miembro de la misma por cualquier número positivo, sin que se altere el sentido de la inecuación"

En símbolos: $a > b \;;\; c > 0 \Rightarrow a . c > b . c$

Ej N°3: $8 > 5 \;;\; 3 \Rightarrow 8 . 3 > 5 . 3$

$24 > 15$

b) "Dada una inecuación, al multiplicar cada miembro de la misma por cualquier número negativo, **se invierte** el sentido de la inecuación"

Ej N°4: $8 > 5$; -3 $\Rightarrow$ $8 . (-3) < 5 . (-3)$

$-24 < -15$

Ej N°5: ¿se puede multiplicar una inecuación m.a.m. por otra inecuación? Se puede, mientras la nueva inecuación no esté en sentido opuesto ni altere los signos, por ej:

$x > 2$ la inecuación dada

. $5 > 4$ la inecuación que multiplica m.a.m.

$5x > 8$ amplía la desigualdad entre los miembros

Ej N°6: ¿se puede elevar al cuadrado una inecuación? Rige lo mismo dicho más arriba, se puede siempre que no se viole la propiedad 3, que es la referente a la multiplicación.

$x < -3$ la inecuación dada

$x^2 > 9$ elevar al cuadrado cada miembro causaría:

Al segundo miembro lo estamos multiplicando por un número claramente negativo (-3), y al primero también, porque según la primera inecuación x es negativo, por lo tanto invertimos en sentido de la inecuación. Esto es correcto salvo que al elevar al cuadrado estamos agregando más soluciones, ya que esta inecuación queda: $x < -3 \veebar x > 3$

Ej N°7: ¿se puede aplicar módulo m.a.m. a una inecuación?

$-5 < 2$ la inecuación dada

$|-5| < | 2 |$ módulo en ambos miembros:

$5 < 2$ lo que es falso, el error ocurrió porque al (-5) lo estamos multiplicando por un número negativo (-1) pero al 2 por un número positivo, y esto viola la prop3.

Ej N°8: dada la inecuación $\frac{1}{x} \geq -1$, ¿se puede escribir $1 \geq -x$, o sea "pasar la x"?

Rta: según lo dicho, la única operación que se puede hacer en una inecuación es alguna operación miembro a miembro, hacer el "atajo" que se suele llamar *paso la x multiplicando*, en realidad, es multiplicar miembro a miembro por x, pero si hacemos eso, debemos aplicar la propiedad 3, y para aplicarla, o conocemos el signo de x (para aplicar la 3a ó la 3b) o desglosamos en los dos casos si no lo conocemos. En este caso la expresión 1/x puede tener ambos signos, por lo cual x puede tener ambos signos, en conclusión es incorrecto escribir $1 \geq -x$.

5.1 Lineales

Es cuando "todas las x" están en el numerador y con exponente unitario.

Ej N°9: resolver la inecuación $1 - 3x > 6 - x$

$1 - 3x > 6 - x$ la inecuación dada (no hay valores prohibidos)

$1 - 3x - \mathbf{1} > 6 - x - \mathbf{1}$ – 1 m.a.m. (propiedad 2)

$-3x > 5 - x$ hemos quitado el (-1)

$-3x + \boldsymbol{x} > 5 - x + \boldsymbol{x}$ + x m.a.m. (propiedad 2)

$-2x > 5$ hemos quitado el (-x)

$-2x \,.\left(-\mathbf{\frac{1}{2}}\right) < 5\,.\left(-\mathbf{\frac{1}{2}}\right)$. (-1/2) m.a.m. (propiedad 3b)

$x < -5/2$ hemos quitado el (-2)

S = (-∞ ; -5/2) conjunto solución

<u>ACTIVIDAD</u>: hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones lineales.

5.1) $\frac{2x-1}{5} + \frac{1-3x}{2} \geq \frac{7x}{6}$ gp R : S = $\left(-\infty \,; \frac{9}{68}\right]$

5.2) $\frac{x+1}{5} + \frac{2+x}{3} \leq 4x$ gp R: S = $\left[\,\frac{1}{4}; +\infty\right)$

5.3) $3x - 5 < \frac{x}{4} + \frac{4x+3}{2}$ gp R: S = $\left(-\infty; \frac{26}{3}\right)$

5.2 Racionales

Es cuando hay “alguna x” en el denominador.

<u>Ej N°10</u>: resolver la inecuación $\frac{1}{x} > 2$

Método I – analizando la expresión para ver si podemos obtener el signo de x:

CE: x ≠ 0 condiciones de existencia de la expresión

también vemos que por tener que ser siempre el primer miembro mayor que 2, entonces deberá ser $\frac{1}{x}$ siempre positivo, por lo tanto numerador y denominador deberán tener el mismo signo, como 1 (numerador) es positivo, entonces aparece otra condición, x deberá ser positivo también:

CE: x ≠ 0 ∧ x > 0 ⇒ x > 0

$\frac{1}{x}\ .\ x > 2\ .\ x$. x m.a.m. (propiedad 3a)

$1 > 2\,x$ cuenta x/x = 1

$\frac{1}{2} > x$. 2 m.a.m. (propiedad 3a)

Ya estaría solucionada la inecuación, aunque aún nos falta filtrarla por las condiciones que debe cumplir x, que fueron analizadas más arriba (x > 0). La solución es la intersección de las CE con la solución preliminar hallada:

$$x < \frac{1}{2} \quad \wedge \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad S = \left(0\,;\frac{1}{2}\right)$$

Método II – "fabricando" el cero en uno de los miembros:

CE: x ≠ 0	las condiciones de existencia
$\frac{1}{x} - 2 > 0$	-2 m.a.m. (ya fabricamos el cero)
$\frac{1-2x}{x} > 0$	denominador común

Hecho esto, la regla de los signos dice que para que el primer miembro sea positivo, los signos de numerador y denominador deben ser iguales:

ambos positivos	ó	ambos negativos
$1 - 2x > 0 \quad \wedge \quad x > 0$	$\veebar$	$1 - 2x < 0 \quad \wedge \quad x < 0$
$1 > 2x \quad \wedge \quad x > 0$		$1 < 2x \quad \wedge \quad x < 0$
$1/2 > x \quad \wedge \quad x > 0$		$1/2 < x \quad \wedge \quad x < 0$ falso

Por lo tanto la solución es la primera columna:

$$S = \left(0\,;\frac{1}{2}\right)$$

Ej N°11: resolver la inecuación $\frac{2+x}{3-x} < 0$

CE: 3-x ≠ 0 ⇒ x ≠ 3

En esta inecuación, el cero "ya viene fabricado", por lo tanto aplicamos la regla de los signos, en este caso "numerador y denominador tienen signos distintos":

positivo y negativo	ó	negativo y positivo
$2 + x > 0 \quad \wedge \quad 3 - x < 0$	$\veebar$	$2 + x < 0 \quad \wedge \quad 3 - x > 0$
$x > -2 \quad \wedge \quad 3 < x$		$x < -2 \quad \wedge \quad 3 > x$
$x > 3$		$x < -2$

Por lo tanto la solución es:

$$S = (-\infty; -2) \cup (3\,; +\infty)$$

Ej N°12: resolver la inecuación $\frac{x^2}{(x-1)(x+2)} \leq 0$

CE: x ≠ 1 ∧ x ≠ -2

Ya viene el cero fabricado; por lo tanto la regla de los signos aplicada a la expresión será:

negativo/cero y positivo			ó	positivo/cero y negativo		
$x^2 \leq 0$	$\wedge$	$(x-1)(x+2) > 0$	$\veebar$	$x^2 \geq 0$	$\wedge$	$(x-1)(x+2) < 0$
$x = 0$		$x-1 > 0 \ \wedge \ x+2 > 0$ $\veebar$ $x-1 < 0 \ \wedge \ x+2 < 0$		V siempre		$x-1 < 0 \ \wedge \ x+2 > 0$ $\veebar$ $x-1 > 0 \ \wedge \ x+2 < 0$
		$x > 1 \ \wedge \ x > -2$ $\veebar$ $x < 1 \ \wedge \ x < -2$				$x < 1 \ \wedge \ x > -2$ $\veebar$ $x > 1 \ \wedge \ x < -2$
		$x > 1$ $\veebar$ $x < -2$				$-2 < x < 1$ $\veebar$ F
F				$-2 < x < 1$		

Con lo cual el resultado es:

$$S = (-2; 1)$$

<u>ACTIVIDAD</u>: Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones racionales.

5.4) $\frac{1}{x} < 1$ gp

R : S = $(-\infty\,; 0) \cup (1; +\infty)$

5.5) $\frac{1}{x} + 3 > 4$ LT-TP2-17.2

R : S = $(0\,; 1)$

5.6) $\frac{3}{x-2} > 0$ gp

R : S = $(2; +\infty)$

5.7) $\frac{1-x}{1+x} > 0$ LT-TP2-17.5

R : S = $(-1; 1)$

5.8) $\frac{1-x}{x+5} \leq 0$ LT-TP2-17.7

R : S = $(-\infty\,; -5) \cup [1; +\infty)$

5.9) $-1 \leq \frac{2x-3}{4} < 5$ LT-TP2-17.8

R: S = $\left[-\frac{1}{2}\,; \frac{23}{2}\right)$

5.10) $1 + \frac{4}{x-2} - \frac{1}{x-1} \leq 0$ LPE-40

R : S = $\{0\} \cup (1; 2)$

5.11) $\frac{3x+2}{x-1} \geq 2$ LPE-10

R : S = $(-\infty\,; -4\,] \cup (1; +\infty)$

5.12) $\dfrac{x-3}{x+2} \geq \dfrac{-5}{x+2}$ Youtube Prime Newtons

R : S = $\mathbb{R}-\{-2\}$

5.13) $\dfrac{-2x+4}{3x-9} \leq \dfrac{x+5}{3x-9}$ pex

R: S = $\left(-\infty\,;-\frac{1}{3}\right] \cup (3;+\infty)$

5.14) $\dfrac{x+31}{2} \geq \dfrac{31\,x}{31+x}$ Rec.1712

R : S = $(-31\,;\,+\infty\,)$

5.15) $\dfrac{7x}{x^2+2x} > 0$ Susy profe youtube

R: S = $(-2\,;0) \cup\ \mathbb{R}^+$

5.16) $\dfrac{x^4-102x^2-2299}{x^3-11x^2+19x-209} \leq 0$ P1.T6.1802

R: S = $(-\infty\,;-11]$

5.3 Con módulo - aplicando las propiedades N°4 y N°5

Saber las propiedades de inecuaciones con módulo, antes de ir a problemas. Son válidas siempre que "todas las x" estén adentro del módulo.

Propiedad N°4 – Módulo mayor a constante b > 0

| x | > b ⇔ x > b ⊻ x < –b

Demostración: por definición de módulo podemos escribir:

(x > b ∧ x ≥ 0) ⊻ (-x > b ∧ x < 0)

(x > b) ⊻ (x < -b ∧ x < 0)

(x > b) ⊻ (x < -b)

x > b ⊻ x < -b

Propiedad N°5 – Módulo menor a constante b > 0

| x | < b ⇔ x < b ∧ x > –b // Forma unificada: –b < x < b

Demostración: por definición de módulo podemos escribir:

(x < b ∧ x ≥ 0) ⊻ (-x < b ∧ x < 0)

(0 ≤ x < b) ⊻ (x > -b ∧ x < 0)

(0 ≤ x < b) ⊻ (-b < x < 0)

-b < x < b o desglosado: x < b ∧ x > –b

Ej N°13: resolver la inecuación $\dfrac{5}{|x|} > 3$

CE: x ≠ 0

Y surge la pregunta, ¿se puede aplicar la propiedad 3 al |x|? Sí, porque sabemos que el signo del denominador es positivo, |x| > 0, entonces puede aplicarse la propiedad 3a.

$5 > 3\,|x|$. |x| m.a.m. (propiedad 3a)

$\frac{5}{3} > |x|$. 1/3 m.a.m. (propiedad 3a)

$-\frac{5}{3} < x < \frac{5}{3}$ por propiedad 5

pero en este intervalo está x = 0, que está prohibido por las CE, por lo tanto hay que quitarlo de la solución:

$S = \left(-\frac{5}{3}; 0\right) \cup \left(0\,; \frac{5}{3}\right)$

<u>ACTIVIDAD</u>: Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones con módulo.

5.17) $|2-4x| \leq 2$ LT-TP2-18.3

R : S = $[0; 1]$

5.18) $\left|\frac{1}{x}+3\right| > 4$ LT-TP2-18.4

R : S = $\left(-\frac{1}{7}\,; 0\right) \cup (0;\ 1)$

5.19) $\left|\frac{1}{x}+5\right| \geq 4$ gp

R : S = $(-\infty\,; -1] \cup [-\frac{1}{9}; 0) \cup\ \mathbb{R}^{+}$

5.20) $0 < |x-1| < 4$ LT-TP2-18.7

R : S = $(-3\,; 1) \cup (1;\ 5)$

5.21) $|x^2-1| > 3$ LT-TP2-18.10

R : S = $(-\infty\,; -2) \cup (2;\ +\infty)$

5.22) $0 < \left|\frac{5}{x-1}\right| < 3$ LT / pex

R : S = $\left(-\infty\,; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{3};\ +\infty\right)$

5.23) $\left|\frac{3\,x+2}{2\,x-1}\right| < 1$ gp R : S = $\left(-3\,;\ -\frac{1}{5}\right)$

5.24) Hallar el conjunto de todos los números reales, tales que su distancia a 3, sea mayor o igual que 4 LT-TP2-21

R : S = $(-\infty\,; -1\,] \cup\ [\,7; +\infty)$

5.25) La distancia entre x-1 y 6, siendo x < 0, es |3x-3|. Hallar x LT-TP2-24

R : x = -2

5.26) Un punto x está 8 unidades distante de (-3). ¿A qué distancia está el punto x de 1? LT-TP2-23

R : { 4 ; 12 }

5.27) $|x-2| < 4-2x$ gp R : S = $(-\infty\,;\ 2)$

5.28) $\frac{9261}{|5\,x+6|^2} \geq |5\,x+6|$ pex R : S = $\left[-\frac{27}{5}; 3\right] - \left\{-\frac{6}{5}\right\}$

5.29) $0 < \left|\frac{1}{3}-2x\right| < 5$ P1.T3.20.02 / mod gp

R : S = $\left(-\frac{7}{3}\ ;\ \frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{6}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$

5.30) $4x - |2x - 1| \geq 3$ R1.T3.20.02

R : S = $[1; +\infty)$

5.31) $\dfrac{x+1}{|3x-1|} < 4$ R1.T1.20.02

R : S = $(-\infty\ ;\ 3/13) \cup (5/11; +\infty)$

5.4 Con módulo - aplicando la definición

Si bien se puede aplicar siempre la definición de módulo para resolver cualquier inecuación, hay casos donde esto se torna imprescindible, porque no se pueden aplicar las propiedades N°4 ni N°5 anteriores.

En los siguientes casos, hay que desglosar ambos módulos, combinar todas las posibilidades, y analizar la viabilidad de cada uno de los cuatro casos que aparecen.

Ej N°14: resolver la inecuación $|x - 3| > |x + 5|$

Caso	x–3	x+5	Valores permitidos para cada caso
I	≥0	≥0	x – 3 ≥ 0 ∧ x+5 ≥ 0 x ≥ 3 ∧ x ≥ –5 x ≥ 3
II	≥0	<0	x – 3 ≥ 0 ∧ x+5 < 0 x ≥ 3 ∧ x < –5 Esto es falso por lo tanto ningún valor x es permitido: ∅
III	<0	≥0	x – 3 < 0 ∧ x+5 ≥ 0 x < 3 ∧ x ≥ –5 –5 ≤ x < 3
IV	<0	<0	x – 3 < 0 ∧ x+5 < 0 x < 3 ∧ x < –5 x < –5

Dentro de esos conjuntos tiene que estar la solución hallada para cada caso, o sea:

Caso	Resolución
I	x – 3 > x + 5 – 3 > 5 (falso) conjunto ∅
III	3 – x > x + 5 – 2 > 2x

	x < – 1 que por las CE anteriores queda –5 ≤ x < – 1
IV	3 – x > – x – 5 3 > – 5 (verdadero) que significa las CE o sea x < –5

Por lo tanto el conjunto solución es: S = (– ∞ ; – 1)

Ej N°15: en los casos donde ambas partes de la inecuación son positivos, como en el ejemplo anterior, se puede *elevar al cuadrado ambos miembros*; debido a que multiplicamos en ambos miembros por números positivos. No será el mismo número a multiplicar, pero siendo positivo, tenemos la garantía de que no se invierte el sentido de la inecuación. En lo que hay que tener cuidado, es que elevar al cuadrado no cause un aumento en las soluciones.

$\vert x-3\vert > \vert x+5\vert$	inecuación del Ej. anterior
$\vert x-3\vert^2 > \vert\, x+5\vert^2$	elevar al cuadrado m.a.m. es posible (+ > +)
$(x-3)^2 > (x+5)^2$	es lo mismo con o sin módulo
$x^2-6x+9 > x^2+10x+25$	desarrollando cuadrados
$9-25 > 10x+6x$	
$-16 > 16x$	
$x < -1$	idem resultado anterior

ACTIVIDAD: Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones con dos módulos.

5.32) $|x-1| < |2\,x+1|$ web

R : S = $(-\infty\ ;\ -2) \cup \mathbb{R}^+$

5.33) $|x-3| - |\,x+5| \leq 2$ P1.campus.21.02 / modif. gp

R : $[\,-2;+\infty)$

5.34) $|x+17| > |x-3|$ R1P1.campus.21.02 / modif. gp

R : $(-7;+\infty)$

5.35) $|2x-1| > |3x+1|$ gp

R : $(-2;0)$

5.36) Hallar las x cuya distancia al -4 es menor o igual que el triple de su distancia al 2.

R : $(-\infty\ ;\ 1/2\ ] \cup [\ 5;+\infty)$ P1.campus.22.02 / modif gp

En los casos a continuación, el módulo también se debe desglosar por definición pues el mismo no abarca todo el primer miembro ni todo el segundo miembro de la inecuación, que es la condición para poder aplicar las propiedades N°4 y N°5.

5.37) $\dfrac{|3x+1|-2}{x-1} \leq 1$ P1.campus.21.02 / modif. gp

R : $(-\infty;-1/2] \cup [0\ ;\ 1)$

5.38) $\dfrac{|-x+1|-1}{x+1} \leq 2$ P1.campus.21.02 / modif. gp

R : $(-\infty; -1) \cup [-2/3\ ;\ +\infty)$

5.39) $\dfrac{|x-1|}{x-2} \geq -1$ P1.campus.21.02 / modif. gp

R : $(-\infty; 3/2] \cup (2; +\infty)$

5.5 Irracionales

Ej N°16: [P2.T1.Ej1b.23.03] resolver la inecuación $\sqrt{3x+1} \geq x-3$

CE: $3x+1 \geq 0$

$x \geq -1/3$

¿Se puede aplicar la propiedad 3 para elevar al cuadrado? Sí, siempre que sepamos el signo del multiplicador miembro a miembro.

Para el caso de x − 3 ≥ 0, o sea x ≥ 3, ambos multiplicadores cumplen:

$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2 \geq (x-3)^2 \quad \wedge \quad x \geq 3$ Propiedad 3a

$3x+1 \geq x^2-6x+9 \quad \wedge \quad x \geq 3$

$x^2-9x+8 \leq 0 \quad \wedge \quad x \geq 3$

$(x-1)(x-8) \leq 0 \quad \wedge \quad x \geq 3$ Por factoreo

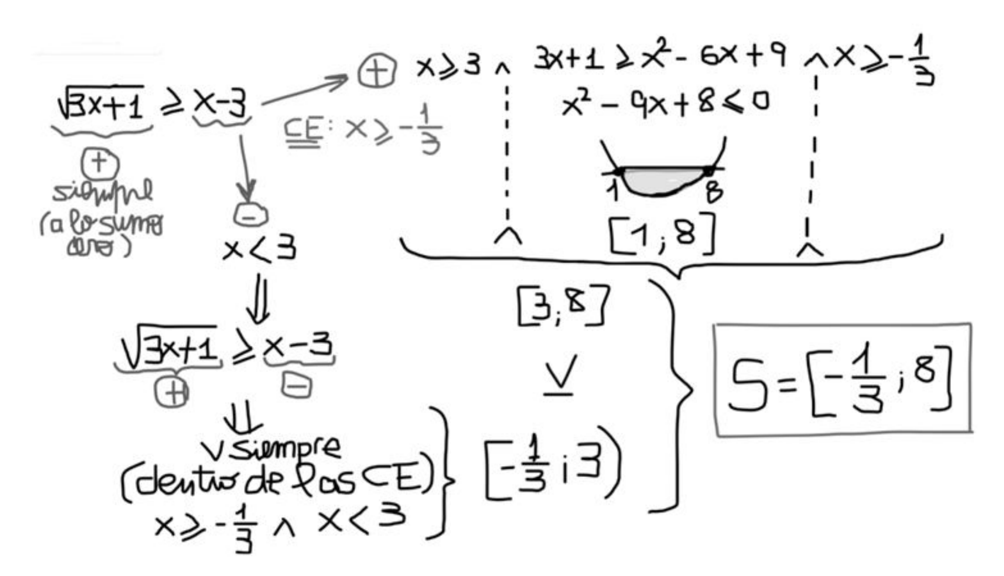
[1 ; 8] ∩ [3 ; +∞)

[3 ; 8]

Luego para el caso de x − 3 < 0, ocurre que la inecuación es siempre verdadera, porque la raíz cuadrada es siempre positiva (a lo sumo cero) y el segundo miembro es siempre negativo. Pero sólo es verdadera dentro de las CE, o sea la solución sería x ≥ 1/3 mientras sea también x < 3, o sea la solución es [-1/3 ; 3). Resumiendo: la solución final es la unión de ambas, vale decir:

$$S = [-1/3\ ;\ 8]$$

Si sirve, va también manuscrito (disculpas por la letra, fue escrito con el mouse):



5.6 Racionales irracionales

Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones racionales irracionales.

5.40) $\frac{1}{3+\sqrt{x}} - \frac{1}{-3+\sqrt{x}} \geq 0$ P1.T3.1410

R: S = $[\,0\,;\,9\,)$

5.41) $-\frac{1}{\sqrt{x}\,+\,7} \geq \frac{1}{7-\,\sqrt{x}}$ Pex

R: S = $(\,49;+\infty)$

5.42) $\frac{\sqrt{x}\;\;+\;\sqrt{2}}{x\;-\;2} \geq \frac{7}{\sqrt{x}\;-\;\sqrt{2}}$ P1.T3.1410

R: S = $[\,0\,;\,2\,)$

5.7 Inecuaciones cuadráticas

Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones cuadráticas, factoreando el polinomio. Luego, rehacerlos cuando sepas función cuadrática, ver el capítulo de funciones al respecto, punto 7.8, problema 7.28.

5.43) $x^2 - 4\,x < 5$ LT-TP3-17.1 R: S = $(-1\,;5\,)$

5.44) $\frac{1}{2}x^2 + 5\,x + 8 \geq 0$ LT-TP3-17.2

R: S = $(-\infty\,;-8] \cup [-2;+\infty)$

5.45) $3\,x^2 - 11\,x - 4 \leq 0$ LT-TP3-17.3 R: S = $\left[-\frac{1}{3};4\right]$

5.46) $3\,x^2 - 6\,x + 3 < 0$ LT-TP2-17.6 R: S = $\emptyset$

5.47) $x^2 - 2\,x \geq 0$ LT-TP2-17.3

R: S = $(-\infty\,;0] \cup [\,2;+\infty)$

5.48) $3\,x^2 - 1 \leq 2$ LT-TP2-18.8 R: S = $[-1\,;1]$

5.49) $x\,(x+1)\,(x-2) \leq x^3 - 35$ pex

R: S = $(-\infty\,;-7] \cup [\,5;+\infty)$

5.50) $-2\,x^2 + 2\,x + 4 > 0$ gp R: S = $(-1\,;2\,)$

6. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

TEMA EXPLICADO EN EL VIDEO 1.9



https://youtu.be/azU9_rsn6js

6.1 Introducción conceptual

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que necesitan una solución simultánea, es decir, los valores hallados para las incógnitas, deben ser solución de todas las ecuaciones al mismo tiempo.

Analizaremos los sistemas de ecuaciones lineales, son aquellos que tienen incógnitas elevadas solamente a la primera potencia, o sean son polinomios de grado uno. Los resolveremos por el método de eliminación de Gauss.

Ej N°1: analicemos el siguiente sistema lineal 2x2 (2 ecuaciones con 2 incógnitas).

$$\begin{cases} 3x + 5y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Solucionar el sistema significa hallar el conjunto de todos los pares de valores (x ; y) que hagan verdaderas ambas expresiones simultáneamente. En otras palabras, es el conjunto que hace verdadera la siguiente expresión compuesta:

$$3x + 5y = -1 \quad \wedge \quad 2x + y = 4$$

Nótese entonces, que la llave que arriba agrupa al sistema de dos ecuaciones, quiere significar "y" (conjunción).

Para solucionar este sistema hay diferentes métodos:

Método de sustitución. Es el método que despeja una de las incógnitas de una ecuación, y la reemplaza en la otra ecuación.

Método de igualación. Es el método que despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones, y después iguala las expresiones halladas.

Método de eliminación de incógnitas por sumas y productos. Hace operaciones válidas basadas en las siguientes *operaciones habilitantes* con ecuaciones, para lograr

una ecuación en donde esté eliminada una de las dos incógnitas:

1. Multiplicar una ecuación miembro a miembro por una constante distinta de cero, lo que obtiene una ecuación equivalente (es decir tiene las mismas soluciones).
2. Sumar dos ecuaciones miembro a miembro, lo que obtiene una tercera ecuación.

Ej N°2: resolver el siguiente sistema 2 x 2 por el método de eliminación de incógnitas por sumas y productos, operando según las operaciones habilitantes (1) y (2) vistas más arriba.

$$\begin{cases} -x - y = 3 & ecuación\ A \\ 5x + 2y = 12 & ecuación\ B \end{cases}$$

a) Operamos para eliminar la incógnita "y"

− x	−	y	= 3	A		
5x	+	2y	= 12	B		
−2x	−	2y	= 6	C	= 2 . A	Multiplica m.a.m. ecuación A (propiedad 1)
5x	+	2y	= 12	B		
3x			= 18	D	= C + B	Suma m.a.m. ecuaciones (propiedad 2)
			x = 6			

b1) Operamos para eliminar la incógnita "x"

− x	−	y	= 3	A		
5x	+	2y	= 12	B		
−5x	−	5y	= 15	C	= 5 . A	Multiplica m.a.m. ecuación A (propiedad 1)
5x	+	2y	= 12	B		
		−3y	= 27	D	= C + B	Suma m.a.m. ecuaciones (propiedad 2)
			y = −9			

Motivo por el cual, la solución del sistema es: S = { (6 ; –9) }

Significa que el conjunto solución del sistema tiene un único elemento, es decir el par ordenado (6 ; -9).

Este par ordenado con x = 6 ; y = –9, es el único par ordenado que es solución de ambas ecuaciones simultáneamente.

Opción: b2) Es válido no hacer el procedimiento completo otra vez (como en b1) para hallar la segunda incógnita. El procedimiento alternativo b2 es más fácil y se acepta. Se toma la primera incógnita hallada, y se "reemplaza hacia atrás" en alguna de las ecuaciones originales, para obtener la otra incógnita.

Reemplazando hacia atrás x=6 en la ecuación A:

-6	$-$	y	$= 3$	A	Despejando y de A
$y =$	-6	-3	$= -9$		
			$y = -9$		

Verificación:

Se verifica que la solución es correcta, reemplazando el par ordenado (x,y) hallado en ambas ecuaciones.

A: $-6 - (-9) = 3$
B: $5 \,.\, 6 + 2 \,.\, (-9) = 12$

A: $-6 + 9 = 3$
B: $30 - 18 = 12$

A: $3 = 3$ ✓
B: $12 = 12$ ✓

6.2 Método de eliminación de Gauss

El método de eliminación de Gauss sistematiza el método de eliminación de incógnitas por sumas y productos, escribiendo sólo los coeficientes de las ecuaciones. También agrega (muy importante) la posibilidad de clasificar el sistema en cuanto a su compatibilidad, sin necesidad de resolverlo.

El modelo de ecuación al que hay que llegar y resolver es: $\boldsymbol{\alpha z = \beta}$

En donde z es la última incógnita que queda, después de eliminar las otras incógnitas, y α,β son constantes que quedan, y resuelven el valor de $z=\beta/\alpha$. Aparecen las siguientes posibilidades:

$\alpha \neq 0 \quad \wedge \quad \beta \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$ z tiene solución única $S = \{ \beta/\alpha \}$

SCD: sistema compatible determinado

$\alpha = 0 \quad \wedge \quad \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \,.\, z = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$

SCI: sistema compatible indeterminado

z puede adoptar cualquier valor $S = \mathbb{R}$

$\alpha = 0 \quad \wedge \quad \beta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \,.\, z = \beta \quad \Rightarrow \quad 0 = \beta$

y esto es una contradicción porque habíamos partido de que $\beta \neq 0$

SI: sistema incompatible $S = \emptyset$

Ej. N°3: Usando el mismo ejemplo anterior:

$$\begin{cases} -x - y = 3 & ecuación\ A \\ 5x + 2y = 12 & ecuación\ B \end{cases}$$

a) Operamos para eliminar la incógnita que está más a la izquierda (x), colocando solamente los coeficientes, y la constante del otro lado (llamándola "k"), el objetivo es que la ecuación C tenga un cero en el casillero de la izquierda (columna x):

x	y	k			
− 1	−1	3	A		
5	2	12	B		
0	−3	27	C	= 5 . A + B	La ecuación C es α . y = β
	-3 y = 27		⇒	y = −9	
	α = −3	β = 27			
	SCD				

b1) Operamos para eliminar la otra incógnita. Para eso, conmutamos las columnas:

y	x	k			
− 1	−1	3	A		
2	5	12	B		
0	3	18	C	= 2 . A + B	La ecuación C es α . x = β
	3 x = 18		⇒	x = 6	
	α = 3	β = 18			
	SCD				

Opción: b2) al igual que en ejemplo anterior, se acepta no repetir todo el procedimiento completo otra vez para hallar la segunda incógnita, y en su lugar, "reemplazar hacia atrás" para obtener la otra incógnita.

Reemplazando hacia atrás y=−9 en la ecuación A:

− x	−	(−9)	= 3	A	Despejando x de A
x =	9	−3	= 6		
			x = 6		

Todo esto junto se puede colocar en un único esquema reducido, que aplica el método y reemplaza hacia atrás en una sola tabla. Lo vemos en el siguiente:

Ej. N°4: resolver el siguiente sistema por el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} -2x + y = 4 & ecuación\ A \\ 3x + 2y = 6 & ecuación\ B \end{cases}$$

Resolvemos ahora todo junto, según lo explicado en los ejemplos anteriores.

x	y	k				
− 2	1	4	A			
3	2	6	B			
0	7	24	C	= 3 . A + 2 . B		
	7 y = 24		⇒	y = 24/7	⇒ en A:	x = (y−4) / 2
	α = 7	β = 24				x = −2/7
	SCD					S = { (−2/7 ; 24/7) }

Ej. N°5: resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 & ecuación\ A \\ -2x + 3y = 2 & ecuación\ B \end{cases}$$

Resolvemos todo junto, según lo explicado en los ejemplos anteriores.

x	y	k		
2	−3	1	A	
−2	3	2	B	
0	0	3	C	= A + B
	0 y = 3		⇒	0 = 3
	α = 0	β = 3		⇓
	SI			S = ∅

Ej. N°6: resolver el siguiente sistema por el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} 3x + 2y = x & ecuación\ A \\ 3x + 4y = y & ecuación\ B \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones que nos dan, no viene en el formato pedido por el método, motivo por el cual, primero, hay que adecuarlo al método, que exige poner todas las incógnitas en el primer miembro, y las constantes (k) en el segundo.

$$\begin{cases} 3x + 2y - x = 0 & ecuación\ A \\ 3x + 4y - y = 0 & ecuación\ B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 & ecuación\ A \\ 3x + 3y = 0 & ecuación\ B \end{cases}$$

Y ahora sí, tenemos el sistema preparado para aplicar el método de eliminación de Gauss. No olvidemos que hay que asegurarse siempre esto, antes de "lanzarnos" a aplicar el método.

x	y	k		
2	2	0	A	
3	3	0	B	
0	0	0	C	= –3 . A + 2 . B
	0 y = 0		⇒	0 = 0
	α = 0	β = 0		
	SCI			

Cuando el sistema tiene infinitas soluciones, quiere decir que son infinitos pares ordenados (x,y), pero no cualquier combinación, sino los que cumplen con una relación. Se expresan con un **parámetro** (lo mismo visto en capítulos anteriores), una variable barre todo el conjunto de los números reales, y eso genera los infinitos pares (x,y) que son solución del sistema.

$t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y = t \quad \Rightarrow \quad$ en A: $x = -t$

Y expresamos el conjunto solución:

$\mathbf{S = \{ (-t ; t) \wedge t \in \mathbb{R} \}}$

Ej. N°7: vamos a encarar ahora los sistemas 3x3 (tres ecuaciones con tres incógnitas) por el método de eliminación de Gauss, empezando por el siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 4y + z = 6 & ecuación\ A \\ x + 4y - 2z = -1 & ecuación\ B \\ -x + y - 3z = 1 & ecuación\ C \end{cases}$$

El primer paso será reducir el sistema a un sistema 2x2. Para eso crearemos dos nuevas ecuaciones, tomando de a dos, de la forma más conveniente que nos permita lograr un cero en la primera columna de la izquierda, 2° y 3° filas:

	x	y	z	k		
	3	–4	1	6	A	
	1	4	–2	–1	B	
	–1	1	–3	1	C	
ByC	0	5	–5	0	D	= B + C
AyB	0	16	–7	–9	E	= 3 . B – A

Y como en esta operación hemos eliminado la primera columna, las ecuaciones D,E conforman ahora un sistema 2x2, que resolvemos como ya sabemos hacer, de los ejemplos anteriores. Como trabajamos eliminando de izquierda a derecha, y como el método es con sumas y productos, conviene eliminar z para trabajar con números más fáciles, conmutamos entonces las columnas y-z:

z	y	k			
–5	5	0	D		
–7	16	–9	E		
0	–45	45	F	= 7 . D – 5 . E	
	–45 y = 45		⇒	y = –1	⇒ en D: z = y
	α = –45	β = 45			z = –1
	SCD				⇒ en C: x = y+3z-1
					x = 1

Con lo cual ya tenemos los tres valores de la solución:

S = { (1 ; –1 ; –1) }

Ej. N°8: resolver el siguiente sistema 3x3 (tres ecuaciones con tres incógnitas) por el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} 5x + y + z = 0 & \text{ecuación } A \\ -4x + 2y - 3z = 4 & \text{ecuación } B \\ x - 4y + 2z = -9 & \text{ecuación } C \end{cases}$$

Conviene siempre mirar antes las ecuaciones y buscar de qué manera nos conviene ponerlas en la tabla para facilitar sumas y productos, para ello lo mejor será en este caso evitar que la primera incógnita a eliminar sea x, la conmutamos con la columna z:

	z	y	x	k			
	1	1	5	0	A		
	-3	2	-4	4	B		
	2	-4	1	-9	C		
AyB	0	5	11	4	D	= 3 . A + B	
AyC	0	6	9	9	E	= 2 . A – C	
DyE		0	21	-21	F	= 6 . D – 5 . E	
			21 x = -21		⇒	x = -1	⇒ en E: y=(9-9x)/6
			α= 21	β=-21			y = 3
			SCD				⇒ en A: z=-y-5x
							z = 2

Y entonces la solución es:

S = { (–1 ; 3 ; 2) }

Ej. N°9: resolver el siguiente sistema 3x3 (tres ecuaciones con tres incógnitas) por el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 3 & ecuación\ A \\ x + 4y - 2z = -1 & ecuación\ B \\ -x + y - 3z = 1 & ecuación\ C \end{cases}$$

	x	y	z	k		
	3	2	4	3	A	
	1	4	-2	-1	B	
	-1	1	-3	1	C	
AyB	0	10	-10	-6	D	= 3 . B - A
AyC	0	5	-5	6	E	= 3 . C + A
DyE		0	0	18	F	= 2 . E – D
			0 z = 18		⇒	0 = 18
			α=0	β=18		⇓
			SI			S = ∅

Ej. N°10: resolver el siguiente sistema 3x3 (tres ecuaciones con tres incógnitas) por el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 & ecuación\ A \\ -3x + 2y + z = 3 & ecuación\ B \\ -8x - 4y - 4z = -8 & ecuación\ C \end{cases}$$

Y queda más cómodo poner a la izquierda la z:

	z	x	y	k			
	1	2	1	2	A		
	1	-3	2	3	B		
	-4	-8	-4	-8	C		
AyB	0	5	-1	-1	D	= A – B	
AyC	0	0	0	0	E	= 4 . A + C	
			0	0	F	= E	
			0 y = 0		⇒	0 = 0	⇒ parametrizar
			α=0	β=0			las ∞ ternas ordenadas
			SCI				

Recordando que un **parámetro** es lo mismo visto en capítulos anteriores: una variable que creamos para barrer todo el conjunto de los números reales, la igualamos con una de las incógnitas, y eso genera las infinitas ternas (x,y,z) que son solución.

t ∈ ℝ ⇒ x = t ⇒ en D: y = 5t + 1

⇒ en A: z = 2 – y – 2x = 2 – (5t+1) – 2 t = 2-5t-1-2t= 1-7t

S = { (t ; 5t+1 ; 1-7t) ∧ t ∈ ℝ }

6.3 Sistemas homogéneos

Se llaman sistemas homogéneos, aquellos sistemas de ecuaciones que tienen sus constantes (o términos independientes) igual a cero en todas las ecuaciones del sistema. Esto produce ciertos efectos que hay que considerar. Sabíamos que:

SCD:	$\alpha \neq 0$	∧	$\beta \in \mathbb{R}$	⇒	solución única
SCI:	$\alpha = 0$	∧	$\beta = 0$	⇒	infinitas soluciones
SI:	$\alpha = 0$	∧	$\beta \neq 0$	⇒	sin solución

Pero dada la condición de homogéneo, siempre será $\beta = 0$ por lo tanto los SH serán siempre solamente los dos primeros, y siempre serán compatibles:

SCD:	$\alpha \neq 0$	∧	$\beta = 0$	⇒	z = 0
SCI:	$\alpha = 0$	∧	$\beta = 0$	⇒	infinitas soluciones

Como los SH siempre tienen solución, o tienen una solución (SCD), llamada "la solución trivial" que se da cuando todas las incógnitas valen cero, o tienen infinitas soluciones (SCI), la trivial más infinitas más, que habrá que parametrizar.

Ej. N°11: resolver el siguiente sistema homogéneo 3x3 (tres ecuaciones con tres incógnitas) por el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 & \textit{ecuación A} \\ 2x - 3y + 3z = 0 & \textit{ecuación B} \\ x - 2y + z = 0 & \textit{ecuación C} \end{cases}$$

	x	y	z	k		
	1	3	2	0	A	
	2	-3	3	0	B	
	1	-2	1	0	C	
AyC	0	5	1	0	D	= A – C
AyB	0	9	1	0	E	= 2 . A – B
DyE		0	4	0	F	= 9 . D – 5 . E

4 z = 0		⇒	z = 0	⇒ en D: y=-z/5
α=4	β=0			y = 0
SCD				⇒ en A: x=-2z-3x
				x = 0

Y entonces la solución es sólo la trivial:

S = { (0 ; 0 ; 0) }

Ej. N°12: resolver el siguiente sistema homogéneo 3x3 (tres ecuaciones con tres incógnitas) por el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 & ecuación\ A \\ 2x + 5y + 2z = 0 & ecuación\ B \\ -x - 4y - 7z = 0 & ecuación\ C \end{cases}$$

	x	y	z	k			
	1	2	-1	0	A		
	2	5	2	0	B		
	-1	-4	-7	0	C		
AyC	0	-2	-8	0	D	= A + C	
AyB	0	-1	-4	0	E	= 2 . A – B	
DyE		0	0	0	F	= 2 E – D	
			0 z = 0		⇒	0 = 0	⇒ parametrizar
			α=0	β=0			para expresar la solución
			SCI				

t ∈ ℝ ⇒ z = t ⇒ en E: y = -4z = -4t

⇒ en A: x = z - 2y = t – 2 (-4t) = t+8t = 9t

S = { (9t ; -4t ; t) ∧ t ∈ ℝ }

6.4 Eliminación de Gauss-Jordan

Mostraremos el método directamente en un sistema 3x3. Lo que se busca en un primer paso es hacer lo siguiente con la **matriz aumentada** (columna de la derecha son los términos independientes):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{array}\right] \rightarrow$$

Con la última fila obtenida, ya se puede clasificar el sistema (como hemos visto más arriba); luego, se busca lograr la **matriz identidad**:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \blacksquare & 0 & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{array}\right]$$

Donde los números que quedan en los tres casilleros grisados ■, serán la solución del sistema.

Ej. N°13: resolver el siguiente sistema 3x3 por eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = -2 & ecuación\ A \\ -x + 2y + z = 10 & ecuación\ B \\ x - 3y - 5z = -14 & ecuación\ C \end{cases}$$

El primer paso es escribir la matriz aumentada, luego usaremos filas y columnas:

3	1	2	-2	F_1
-1	2	1	10	F_2
1	-3	-5	-14	F_3

Fabricar ceros en la primera columna, segunda y terceras filas, igual que antes:

3	1	2	-2	
0	-1	-4	-4	$F_2 + F_3 \rightarrow F_2$
0	-10	-17	-40	$3\,F_3 - F_1 \rightarrow F_3$

Ahora, fabricar un cero en la segunda columna, tercera fila:

3	1	2	-2	
0	-1	-4	-4	
0	**0**	-23	0	$10\,F_2 - F_3 \rightarrow F_3$

La F_3 hallada nos indica que es un SCD (Sistema Compatible Determinado), y que z = 0. Sigue dividirla por (-23), en el próximo paso. También; fabricar un cero en la F_1, C_2:

3	0	-2	-6	$F_1+F_2 \rightarrow F_1$
0	-1	-4	-4	
0	**0**	**1**	0	$F_3 / (-23) \rightarrow F_3$

En la siguiente fabricamos el cero en F_1, C_3 y en F_2, C_3:

3	0	**0**	-6	$2\,F_3 + F_1 \rightarrow F_1$
0	**1**	**0**	4	$-\,4\,F_3 - F_2 \rightarrow F_2$
0	**0**	**1**	0	

Y queremos un 1 en F_1, C_1:

1	**0**	**0**	-2	$F_3 / 3 \rightarrow F_3$
0	**1**	**0**	4	
0	**0**	**1**	0	

Lograda la matriz identidad, la solución es x = -2 ; y = 4 ; z = 0 lo que se escribe:

S = { (-2 ; 4 ; 0) }

Ej. N°14: resolver el siguiente sistema 3x3 por eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 & \quad ecuación\ A \\ -x + y - 3z = -2 & \quad ecuación\ B \\ x + y + z = 6 & \quad ecuación\ C \end{cases}$$

El primer paso es escribir el sistema en forma de matriz aumentada, como siempre:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Segundo paso, fabricar ceros en la primera columna, segunda y terceras fila:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ \mathbf{0} & 2 & -2 & 4 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 & 8 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ F_2 + F_3 \rightarrow F_2 \\ 2\,F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \end{array}$$

Sigue ahora, fabricar un cero en la segunda columna, tercera fila, como se muestra a continuación:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ \mathbf{0} & 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 & 12 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} F_2 / 2 \rightarrow F_1 \\ \\ 2\,F_3 - F_2 \rightarrow F_3 \end{array}$$

Ya tenemos la primera parte del proceso lograda (los tres ceros), donde se ve que es un SCD (Sistema Compatible Determinado) y que z = 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} F_2 - F_2 \rightarrow F_1 \\ \\ F_3 / 4 \rightarrow F_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} F_1 / 2 \rightarrow F_1 \\ F_2 + F_3 \rightarrow F_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} F_1 - F_3 \rightarrow F_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

Donde tenemos que el conjunto solución es: **S = { (-2 ; 5 ; 3) }**

6.5 Analizar la compatibilidad y resolver el sistema

Clasificar los sistemas de ecuaciones lineales siguientes, luego hallar el conjunto solución mediante el método de eliminación de Gauss, o el de Gauss-Jordan, según lo explicado en párrafos anteriores:

6.1) Una colección de 40 monedas de 5, 10 y 25 centavos, suma un valor total de $4,60. Si el doble de la cantidad de monedas de 5 centavos es igual a tres veces

el número de monedas de 25 centavos, ¿cuántas monedas hay de cada tipo?

R : Es un SCD con 12 de \$0,05 ; 20 de \$0,10 ; 8 de \$0,25 LPE-19

6.2) $\begin{cases} x - y + 3\,z = 4 \\ 2\,x - 3\,y + z = -2 \\ x - 2\,y - 2\,z = 3 \end{cases}$

LPE-207

R : Es un SI (sistema incompatible) S = ∅

6.3) $\begin{cases} 2\,x - 8\,y + 90 = 3 - x \\ 2\,x + 6\,y + 3 = 5\,(8 + y) \end{cases}$

LPE-214

R : Es un SCD con S = { (11 , 15) }

6.4) $\begin{cases} 2\,x + 3\,z = y \\ x - 2\,y + 4\,z = 0 \\ 15\,z = 7\,y - 5\,x \end{cases}$

LPE-303

R : SCI con S = { (-2/3 t , 5/3 t , t) con t ∈ ℝ }

6.5) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 2\,y + z = 2 \\ 2\,x - y = -1 \end{cases}$

LPE-415

R : SCI con S = { (-1/3 λ , 1- 2/3 λ , λ) con λ ∈ ℝ }

6.6) $\begin{cases} x + 2\,y = 6 \\ \dfrac{2\,x + y}{3} = y - 6 \end{cases}$

LT-TP4-1.1

R : Es un SCD con S = { (-4 , 5) }

6.7) $\begin{cases} 2\,(x - 1{,}5\,y) - 5 = 0 \\ \dfrac{x}{\frac{3}{2}} = y + \dfrac{5}{6} \end{cases}$

LT-TP4-1.3

R : Es un SI y por ello S = ∅

6.8) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1}{3}\,y = x \\ \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{2}{3}\,y = y \end{cases}$

LT-TP4-1.5

R : Es un SCI con S = { (2/3 t , t) con t ∈ ℝ }

6.9) $\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ -2x + y + 3\,z = 9 \\ 4x + 2y + z = 11 \end{cases}$

LT-TP4-3.2

R : Es un SCD con S = { (1 , 2 , 3) }

6.10) $\begin{cases} 4x - 2/3y = 0 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$

gp

R: Es un SCD con S = { (0 , 0) }

6.11) $\begin{cases} 2x + 2/3y = 0 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$

ingreso fra problema de aplicación 32b

R: Es un SCI con S = { (-1/3 t , t) con t ∈ ℝ }

6.12) $\begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ 4x + z = 0 \\ -10y + 6z = 0 \end{cases}$

ingreso fra problema de aplicación 32c

R: Es un SCD con S = { (0 , 0 , 0) }

6.13) $\begin{cases} 4x - y = 0 \\ -3x + 5y + 6z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \end{cases}$

ingreso fra problema de aplicación 32d

R: Es un SCD con S = { (0 , 0 , 0) }

6.14) $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y + 2\,z = 9 \\ x + 4y + 7z = 6 \end{cases}$

LT-TP4-3.3

R : SCI con S = { (2+9 λ , 1- 4 λ , λ) con λ ∊ ℝ }

6.15) Sea el sistema: $\begin{cases} 2kx - 3y + z = 7 \\ -x + ky - 3z = 0 \\ 9x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$

LT-TP4-17

a) Hallar k cuando (1,2,3) satisface el sistema R: k = 5

b) Resolver el sistema para k = 2 R: $S = \left\{\left(\frac{21}{25}; -\frac{42}{25}; -\frac{7}{5}\right)\right\}$

6.16) Una fábrica de muebles fabrica mesas, sillas, y armarios. Cada mueble pasa por tres etapas de producción: 1) corte, 2) armado y 3) acabado. La fábrica dispone semanalmente de un máximo de 300 horas-hombre de corte, 400 horas-hombre de armado, y 590 horas-hombre de acabado. La cantidad de horas-hombre de trabajo necesarias para cada operación por mueble, responde a la siguiente matriz de producción:

	CORTE	ARMADO	ACABADO
1 Mesa	1/2	1/2	1
1 Silla	1	3/2	3/2
1 Armario	1	1	2
TOTAL	300 HH	400 HH	590 HH

Determinar, si esto es posible, cuántas mesas, sillas, y armarios se deben producir para ocupar el total exacto de las horas-hombre disponibles.

R : Se trata de un SI (no es posible hacer lo pedido) LT-TP4-21

6.17) $\begin{cases} x - 4y = 3x + 2y \\ x = 2x - 2y \end{cases}$

LT-TP4-1.4

R : SCD con S = { (0 , 0) }

6.18) $\begin{cases} -3x + 36z = 5y + 10 \\ 7z - x = 5 \\ x + y = 10z - 4 \end{cases}$

LPE-107

R : SCI con S = { (-5 + 7 λ , 1+ 3 λ , λ) con λ ∊ ℝ }

6.19) $\begin{cases} -x + 5y + z + 2 = 0 \\ 3x - y + 3z = 22 \\ 3y + 2x - 2z = -9 \end{cases}$

gp

R : SCD con S = { (2 ; -1 ; 5) }

6.20) $\begin{cases} y+3x+2z=-2 \\ 2y-x+z=10 \\ -3y+x-5z=-14 \end{cases}$ gp

R : SCD con S = { (-2 ; 4 ; 0) }

6.21) $\begin{cases} 2y-x+6z-4=0 \\ 2x+y+7z-6=0 \\ -7z+1-2x-6y=0 \end{cases}$ gp

R : SCD con S = { (0 ; -1 ; 1) }

6.22) $\begin{cases} y=-x+2z \\ x=5y-7z \\ z=3x+6y \end{cases}$ gp

R : SCD con S = { (0 ; 0 ; 0) }

6.23) $\begin{cases} x-3y+5z=6 \\ 3x+2y+2z=3 \\ -7x-12y+4z=0 \end{cases}$ gp

R : SCD con S = ∅

6.24) Se vendió lapiceras, bolígrafos y lápices por un total de 18 unidades, a un monto total de $ 24.600. Las lapiceras tienen un precio unitario de $1.500, los bolígrafos $1.200, los lápices $900. El total de bolígrafos y lápices vendidos, es la mitad de la cantidad de lapiceras. ¿Cuántas unidades se vendieron de cada producto?

R: 12 lapiceras, 4 bolígrafos y 2 lápices P1.campus.22.02 / mod gp

6.25) Al reponer dinero en un cajero automático se encontraron billetes de $1000, $500 y $100. Indicar cuánto dinero se encontró, si la suma de la cantidad de billetes de $1000 más la cantidad de billetes de $500 más el doble de la cantidad de billetes de $100 era igual a 90 billetes, a su vez diez más el triple de la cantidad de billetes de $100 es igual al doble de la cantidad de billetes de $1000 más el cuádruple de la cantidad de billetes de $500 y por último la cantidad de billetes se anula al restarle el quíntuplo de los billetes de $100 a la suma entre el triple de la cantidad de billetes de $1000 y seis veces la cantidad de billetes de $500.

R: m=10 ; q=20 ; c=30 ; Total = $23.000 P1.T2.4b.23.02

6.6 Diseñar sistemas para una compatibilidad conocida

En los siguientes casos, hallar la constante indicada que logre que el sistema sea SCD (sistema compatible determinado), SCI (sistema compatible indeterminado), ó SI (sistema incompatible), según se pida:

6.26) Determinar la constante entera k, tal que el sistema de ecuaciones siguiente resulte incompatible (SI)

$$\begin{cases} (k^3+56)\,x+57\,y=k^2+\ 56 \\ k\,x+y=1 \end{cases}$$

R: S = { -8 ; 7 } P1.T1.1410

6.27) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, determine el valor de la constante m≠0 para que el sistema sea compatible indeterminado. Indicar su conjunto solución.

$$\begin{cases} 3x - y + 3z = 3 \\ -4x + 3y - z = 1 \\ -2x + 2y + \frac{2}{5}z = m \end{cases}$$

R : m=2 S = { (2-8/5 λ , 3-9/5 λ , λ) con λ ∈ ℝ } pex

6.28) Hallar qué valores deben tener a y b, para lograr un SCD (sistema compatible determinado), un SCI (sistema compatible indeterminado), ó un SI (sistema incompatible):

$$\begin{cases} a\,x - y = 0 \\ x - a\,y = b \end{cases}$$

R : para un SCD: a ≠ 1 ∧ a ≠ -1 ∧ b ∈ ℝ LT-TP4-2.2

para un SCI: (a = 1 ⊻ a = -1) ∧ b = 0

para un SI: (a = 1 ⊻ a = -1) ∧ b ≠ 0

6.29) Hallar los valores de k, para que el sistema sea SCD (sistema compatible determinado), SCI (sistema compatible indeterminado), ó SI (sistema incompatible):

$$\begin{cases} x + y - z = k \\ -x + y + kz = 3 \\ k\,y + z = 5 \end{cases}$$

R : para un SCD: k ≠ 2 ∧ k ≠ -1 LT-TP4-4.2

para un SCI: k = 2

para un SI: k = -1

6.30) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 4\,m\,x + \sqrt{m+17}\ y = -63 \\ m\,x + 3y = -73 \end{cases}$$

Determinar la constante m ≠ 0 si el sistema dado no es compatible determinado, y clasificarlo. Luego, hallar el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 4\,a\,x + \sqrt{m+17}\ y = -63 \\ a\,x + 3y = -73 \end{cases}$$

En donde a = m + 25.

R : m = 127 y se trata de un SI (sistema incompatible) P1.T56.1802

a = 152 y se trata de un SI (sistema incompatible)

6.31) La suma de tres números x, y, z resulta ser 82. La diferencia entre el segundo número y la suma de los otros dos, es 48. La suma del cuádruple del primero, el triple del segundo, y “n” veces el tercero, es 150.

Determinar el valor de “n” que haga que el sistema de tres ecuaciones descripto sea incompatible, es decir lo propuesto anteriormente sea falso.

R : n = 4 P1.T4.1610

6.7 Uso en fracciones simples

Suelen aparecer identidades llamadas “fracciones simples”; donde necesitamos expandir un denominador común, separándolo en sus sucesivos polinomios primos:

Ej. N°15: expandir en fracciones simples la siguiente expresión:

$$\frac{5x+3}{(x-1)(x+3)}$$

Eso se hace armando la siguiente identidad y hallando los coeficientes A y B:

$$\frac{5x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

Dada la identidad, podemos crear el denominador en el segundo miembro:

$$\frac{5x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{A\,(x+3) + B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

A iguales denominadores, podemos igualar los numeradores:

$$5x + 3 = A\,(x+3) + B(x-1)$$

A partir de aquí, existen dos métodos:

MÉTODO I: como esto es una identidad, debe ser válida para todo x, y como lo que buscamos es hallar A y B, no hay ningún problema en darle cualquier valor a x, por ejemplo las raíces del denominador, que tienen la comodidad de anular los paréntesis.

x = -3 : 5 (-3) + 3 = A (-3+3) + B (-3-1)

-12 = A . 0 – 4 B → B = 3

x = 1 : 5 . 1 + 3 = A (1+3) + B (1-1)

8 = A . 4 + 0 B → A = 2

Y ya podemos construír la identidad con sus coeficientes A y B:

$$\frac{5x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3}$$

MÉTODO II: sin darle valores a x, trabajando en forma simbólica. Tomando la identidad ya analizada arriba:

$$5x + 3 = A\,(x+3) + B(x-1)$$

Igualando términos semejantes:

5x + 3 = Ax + 3A + Bx – B

5x + 3 = x (A + B) + 3A – B

Para que se cumpla la identidad deben ser iguales los términos semejantes:

5 = A + B ; 3 = 3A – B

Queda un sistema de ecuaciones 2x2 cuyas soluciones son A=2 ; B=3.

Ej. N°16: expandir en fracciones simples la siguiente expresión:

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-2)}$$

Armando la siguiente identidad y hallando los coeficientes A y B:

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

Dada la identidad, podemos crear el denominador en el segundo miembro:

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

A iguales denominadores, podemos igualar los numeradores:

$$3x-1=A\,(x-2)+B(x+1)$$

Y los dos métodos:

<u>MÉTODO I</u>: dando como valores de x las raíces del denominador.

x = 2 : 3 . 2 – 1 = A (2-2) + B (2+1)

5 = A . 0 + 3 B → B = 5/3

x = -1 : 3 (-1) – 1 = A (-1-2) + B (-1+1)

-4 = -3A + 0 B → A = 4/3

Y ya podemos construír la identidad con sus coeficientes A y B:

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{4/3}{x+1}+\frac{5/3}{x-2}$$

<u>MÉTODO II</u>: sin darle valores a x, trabajando en forma simbólica. Tomando la identidad

$$3x-1=A\,(x-2)+B(x+1)$$

Igualando términos semejantes: 3x – 1 = Ax – 2A + Bx + B

3x – 1 = x (A + B) + (-2A + B)

Para que se cumpla la identidad deben ser iguales los términos semejantes:

3 = A + B -1 = -2A + B

Queda un sistema de ecuaciones 2x2 cuyas soluciones son A=4/3 ; B=5/3.

<u>ACTIVIDAD</u>: Determinar los coeficientes A, B, C que hagan verdaderas las siguientes identidades, que separan el denominador común en "fracciones simples".

6.32) $\frac{2x+1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$ gp

R: A=1/3 , B=5/3

6.33) $\frac{4x+5}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$ gp

R: A=13/5 , B=7/5

6.34) $\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}$ LT – TP3 - 11.1

R: A=7/5 , B=8/5

6.35) $\dfrac{23x-14}{24\,(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$ gp
R: A=−3/8 , B=4/3

6.36) $\dfrac{-4x+71}{35\,(x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-2}$ gp
R: A=−5/7 , B=3/5

6.37) $\dfrac{5x+2}{(x+1)(x+2)(x-2)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x-2}$ gp
R: A=1 , B=−2 , C=1

6.38) $\dfrac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-3}$ LT – TP3 - 11.2
R: A=−1 , B=−1/2 , C=3/2

6.39) $\dfrac{2(2x^2+4x-3)}{x^3+2x^2-x-2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$ gp
R: A=5 , B=1 , C=−2

6.8 Sistemas rectangulares

Se llaman sistemas rectangulares los que tienen diferente cantidad de ecuaciones (n) que de incógnitas (m). Veremos las dos posibilidades, a continuación.

6.8.1 Cantidad de ecuaciones (n) < cantidad de incógnitas (m)

Ej. N°17: el caso más simple posible:

$$\{-x+2y=3 \qquad \left.\begin{matrix} n=1\ ecuación \\ m=2\ incógnitas \end{matrix}\right\}$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones, es decir, son infinitos pares de valores (x;y) que cumplen con dicha ecuación. Hay que tomar un parámetro, y expresar las infinitas soluciones (x;y). También puede despejarse y=f(x).

Ej. N°18:

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ 5x+2y-z=1 \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} n=2\ ecuaciones \\ m=3\ incógnitas \end{matrix}\right\}$$

Resolviendo el sistema por el método de eliminación de Gauss:

	x	y	z	k		
5 . (	2	3	4	5)	A	
2 . (	5	2	-1	1)	B	
	0	11	22	23	C	= 5A – 2B

Logrado el cero en la primera columna, última fila, formamos un nuevo sistema con esa nueva ecuación C, y alguna de las anteriores (elegimos B).

11 . (	5	2	-1	1)	B	
2 . (	0	11	22	23)	C	
	55	**0**	-66	-35	D	= 11B – 2C

Y lo que ocurrió por buscar un cero en la segunda columna (lo que hemos logrado), hemos "arruinado" el otro cero que habíamos logrado en la primera columna, que ahora vale 55, con lo cual siempre nos quedará una ecuación con dos incógnitas.

Tomando la ecuación:

C: 11 y + 22 z = 23 con un parámetro para expresar las infinitas soluciones:

$$z = t \qquad y = \frac{23 - 22z}{11} = -2t + \frac{23}{11}$$

$$x = \frac{5 - 4z - 3y}{2} = t - \frac{7}{11}$$

Por lo tanto el conjunto solución estará en función de un parámetro:

S = { (t – 7/11 ; –2t + 23/11 ; t) ∧ t ∈ ℝ }

Ej. N°19: aumentamos, aún más, la diferencia entre n y m:

$$\begin{cases} x + 3v - 5y + z = 4 & n = 2\ ecuaciones \\ 2x + 5v - 2y + 4z = 6 & m = 4\ incógnitas \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por el método de eliminación de Gauss:

	x	v	y	z	k		
2 . (	1	3	-5	1	4)	A	
	2	5	-2	4	6	B	
	0	1	-8	-2	2	C	= 2A – B

La ecuación C nos informa la relación: v = 8y + 2 z + 2

Si además, quisiéramos lograr un cero en (primera fila, segunda columna), usaremos A y C de la siguiente manera:

	x	v	y	z	k		
	1	3	-5	1	4	A	
3 . (	0	1	-8	-2	2)	C	
	-1	**0**	-19	-7	2	D	= 3C – A

Luego, multiplicando m.a.m. la D, y formando sistema con la C:

	x	v	y	z	k	
	0	**1**	-8	-2	2	C
	1	**0**	19	7	-2	D

Que para clarificar, escribimos:

$$\begin{cases} v = 8y + 2z + 2 \\ x = -19y - 7z - 2 \end{cases}$$

Lo que hace imposible tener un cuarteto único de valores x,y,v,z solución del sistema, ya que las soluciones serán con dos parámetros (ya no alcanza con uno):

$$y \in \mathbb{R} \;\; ; \;\; z \in \mathbb{R}$$

$$v = 8y + 2z + 2 \quad ; \quad x = -19y - 7z - 2$$

6.8.2 Cantidad de ecuaciones (n) > cantidad de incógnitas (m)

Ej. N°20: lo vemos con un ejemplo:

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 3x - 5y = 2 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} n = 3\ ecuaciones \\ m = 2\ incógnitas \end{matrix}\right\}$$

Resolviendo el sistema por el método de eliminación de Gauss:

	x	y	k		
3 . (	-1	2	3)	A	
	3	-5	2	B	
	4	1	1	C	
	0	1	11	D	= 3A + B

La ecuación C ya nos dice directamente que: y = 11

Lo que reemplazado en la ecuación A resulta: x = 19

Es decir que el par ordenado (19;11) al ser obtenido del par de ecuaciones A y B, es solución de ambas. Resta por comprobar qué pasa con C:

C: 4 . 19 + 1 . 11 ≠ 1

Con esto alcanza para afirmar que el sistema no tiene solución, pues la solución debe ser simultánea para las tres ecuaciones: **S = ∅**.

Ej. N°21: reformar la ecuación C del ejemplo anterior, para que x = 19 ; y = 11 sea solución de las tres ecuaciones, hacerlo modificando exclusivamente la pendiente (m) de la ecuación C.

C: 4x + y = 1

y = -4x + 1 → de aquí que la pendiente a modificar, es m = -4

Por ello escribimos:

y = m x + 1

Y esta ecuación debe satisfacer x = 19 ; y = 11 o sea:

11 = m . 19 + 1 → m = 10/19

Por lo tanto la ecuación C reformada queda:

C: y = 10/19 x + 1

Ej. N°22: resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \\ 3x + 2y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} n = 4\ ecuaciones \\ m = 2\ incógnitas \end{matrix}\right\}$$

Podríamos pensar, sin temor a equivocarnos, que este sistema no tendrá solución, lo cual es cierto en la mayoría de los casos donde n>m. Pero veamos qué pasa. Ya sabemos, a estas alturas, que la resolución consiste en tomar dos ecuaciones y resolver el sistema 2x2, luego ver si esa solución verifica en las restantes ecuaciones:

x	y	k		
1	1	3	A	
1	-1	-1	D	
0	2	4	E	= A – B

De la ecuación E resulta que: y=2

Que reemplazado en la A: x=1

Habrá que ver ahora si ese par ordenado satisface o no las restantes ecuaciones:

B: 2 . 1 + 3 . 2 = 8 verifica

C: 3 . 1 + 2 . 2 = 7 verifica

Por lo tanto la solución del sistema es **S = { (1;2) }**

6.8.3 Resolver sistemas rectangulares

Resolver los sistemas rectangulares siguientes:

6.40) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 13 \\ 4x_1 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

gp

R: x_1 = 35 – 13 t ; x_2 = 10 – 3 t
x_3 = 10 t – 28 ; x_4 = t con t ∊ ℝ

6.41) $$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

gp

R: x = 5 – 7 t ; y = 4 t – 1
z = t con t ∊ ℝ

6.42) $$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 7 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$$

grossman.ed6.p24.ej25

R: S = { (19/5 ; 1/5)}

6.43) $$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ x + 3y = 1 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$$

grossman.ed6.p24.ej26

R: S = { }

6.44) $\begin{cases} -2x + z = 1 \\ 4y - v = -1 \\ x + y = -3 \end{cases}$

grossman.ed6.p24.ej21

R: x = – 1/2 + t/2 ; y = – 5/2 – t/2
v = – 9 – 2 t ; z = t con t ϵ ℝ

6.45) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

grossman.ed6.p24.ej23

R: S = { }

7. FUNCIONES PARTE 1

7.1 Conceptos fundamentales

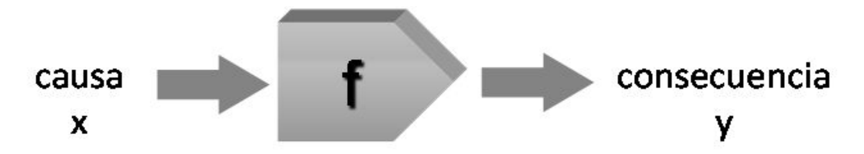
Solemos decir cosas como:

-"Su sueldo, estará *determinado* por sus ventas."

-"La dilatación del alambre, *dependerá* del aumento de la temperatura."

-"El total a pagar, será *en función* del peso de las manzanas."

En ellas vemos que hay alguna magnitud (que llamaremos y) que depende del valor que adopta otra magnitud (que llamaremos x), y a la transformación de x en y la conceptualizamos como f, un proceso que obtiene y a partir de x:



Antes de estudiar funciones, estudiaremos un poco de relaciones, pues las funciones son casos particulares de relaciones.

Una **relación** entre dos conjuntos A y B, es un nuevo conjunto, formado por pares ordenados, que vincula elementos del conjunto de partida (A), con elementos del conjunto de llegada (B), a partir de una regla de correspondencia.

Ej. N°1: sean los conjuntos A = { hombre, mujer, mesa }

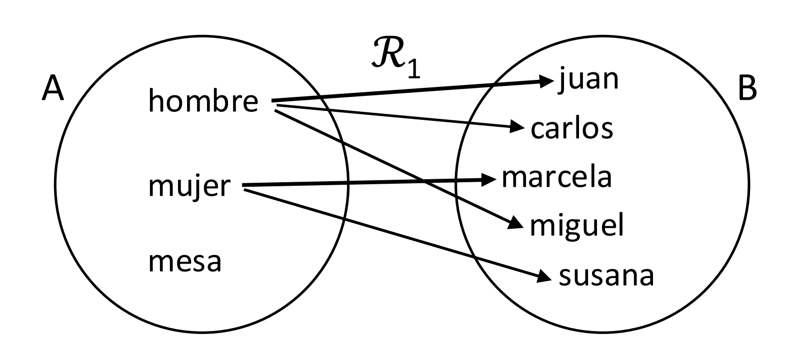
B = { Juan, Carlos, Marcela, Miguel, Susana }

Y definimos la relación: $\mathcal{R}_1$: A → B / "x es el sexo de y"

En donde la regla de correspondencia es "x es el sexo de y", por lo tanto la relación es el conjunto (abreviando ho = hombre y mu = mujer):

$\mathcal{R}_1$ = { (ho, Juan) , (ho, Carlos) , (mu, Marcela) , (ho, Miguel), (mu, Susana) }

Representando en diagrama de Venn la relación:



Las relaciones no tienen restricciones, ellas pueden ser:

1 a 1 Un elemento del conjunto de partida se vincula con un único elemento del conjunto de llegada

1 a n	Un elemento del conjunto de partida se vincula con varios elementos del conjunto de llegada
n a 1	Varios elementos del conjunto de partida se vinculan con un único elemento del conjunto de llegada
n a n	Varios con varios

Ej. N°2: la relación del Ej. 1 es una relación 1 a n, lo que se ve tanto en el diagrama de Venn como en la expresión lista del conjunto relación. El elemento "hombre" del conjunto de partida, tiene tres flechas hacia el conjunto de llegada, el elemento "mujer" tiene dos flechas. El elemento "hombre" está en tres pares ordenados, mientras que "mujer" está en dos pares ordenados.

El conjunto de los elementos del conjunto de partida que pertenecen a la relación, se llama **dominio** de la relación. Los elementos del conjunto de llegada que pertenecen a la relación, se llaman **imágenes**. En otras palabras, la relación obtiene imágenes de los elementos del dominio. El conjunto formado por todas las imágenes, se llama **conjunto imagen** de la relación.

Ej. N°3: el dominio y el conjunto de las imágenes de la relación del Ej.1 son:

Dom = { hombre, mujer }

Im = { Juan, Carlos, Marcela, Miguel, Susana }

Notemos que, en este ejemplo, el dominio no coincide con el A, mientras que el conjunto imagen sí, coincide con el conjunto B, lo que en general se indica como subconjuntos:

$\text{Dom} \subseteq A \qquad\qquad \text{Im} \subseteq B$

Y al conjunto de llegada (todos sus elementos que podrían llegar a ser imágenes) también se lo llama **codominio** de la relación.

En general, una relación es:

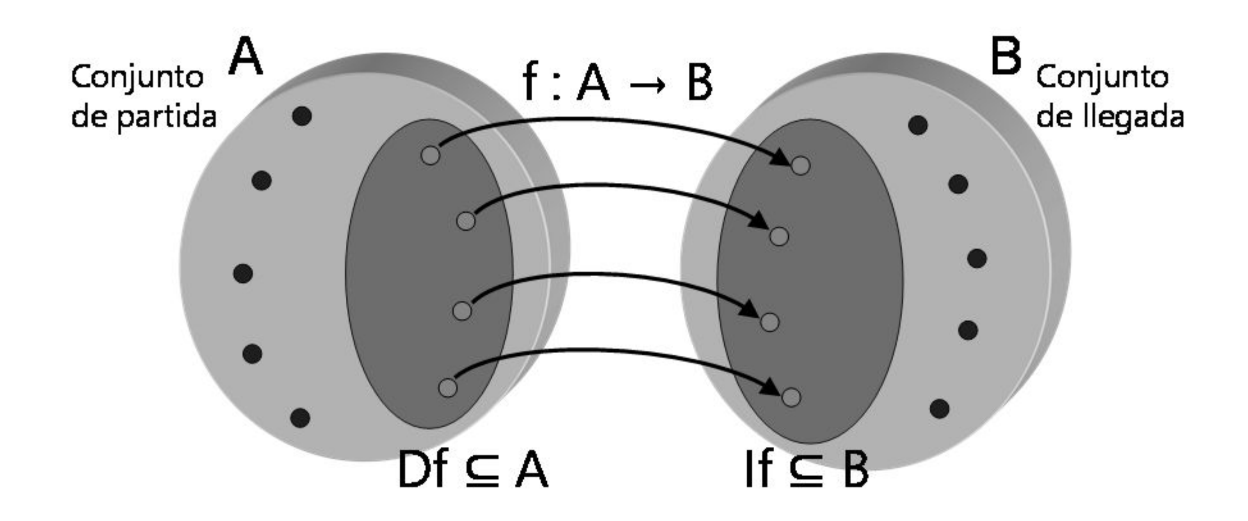
$\mathcal{R}: A \rightarrow B \;/\; \mathcal{R} = \{ (x, y) \in A \times B \;/\; \text{"regla de correspondencia"} \}$

Donde A x B es la operación de conjuntos llamada *producto cartesiano*, y para no abundar demasiado la explicamos como todos los pares ordenados posibles de todos los elementos del conjunto de partida, con todos los elementos del conjunto de llegada, sin que falte ninguno.

Una función es una *relación* que cumple con dos condiciones muy importantes:

1. **EXISTENCIA**, es decir Dominio $\neq \varnothing$, deben existir elementos del conjunto de partida que pertenezcan a la función.
2. **UNICIDAD**, quiere decir que los elementos del dominio tienen imagen única en el codominio.

De incumplirse al menos una de estas dos condiciones, la relación no es función.



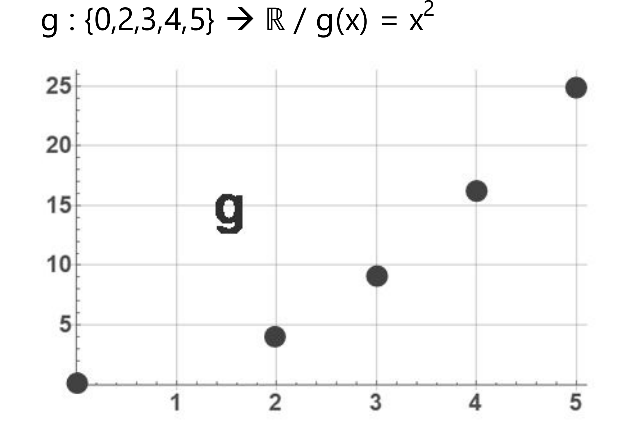
f : Df ⊆ A → B / f(x) = "regla de correspondencia"

De todo lo anterior, es muy importante recalcar que:

1. Las funciones son relaciones.
2. Las funciones son conjuntos de pares ordenados (x,y).
3. Para que una función esté bien definida, tienen que estar dadas como mínimo, la fórmula (o regla de correspondencia) y el dominio.
4. La función NO ES la fórmula (o regla de correspondencia), pues si a una misma fórmula le ponemos dominio distinto, la función será distinta (ver Ej.4).
5. A partir de ahora, salvo que se aclare lo contrario, en este texto usaremos para ambos conjuntos (partida y llegada), los números reales: A = B = ℝ

Ej. N°4: usar $y = x^2$ como fórmula para las funciones f y g siguientes:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x^2$ $g : \{0,2,3,4,5\} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = x^2$



Claramente, son dos funciones distintas: g = { (0,0) , (2,4) , (3,9) , (4,16) , (5,25) }

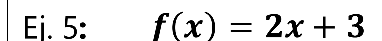
7.2 Las funciones básicas

A continuación las cinco funciones más básicas: lineal, módulo, cuadrática, cúbica, y raíz cuadrada.

7.2.1 Función lineal

Forma explícita de la función lineal: $f(x) = m\,x + b$

m: pendiente de la recta	$m = \Delta y/\Delta x$
b: ordenada al origen	$b = f\,(0)$
a: abscisa al origen	$a = -b/m$
conjunto de ceros	$C^0 = \{ a \}$



Ej. 5: $f(x) = 2x + 3$

$D_f = \mathbb{R}$

$I_f = \mathbb{R}$

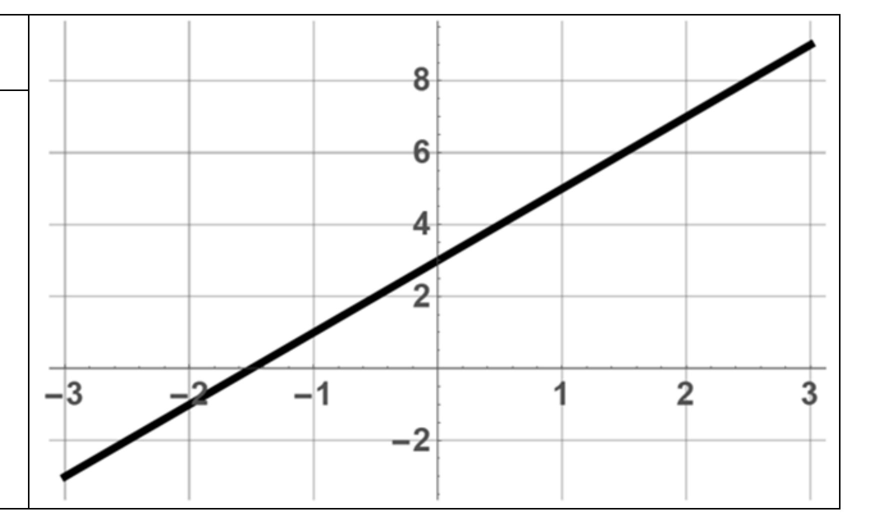
Siempre creciente (m>0)

$a = -3/2$

$C^0 = \{ -3/2 \}$

$C^+ = (-3/2\ ;\ +\infty\ )$

$C^- = (-\infty\ ;\ -3/2\ )$



Ej. 6: $f(x) = -2x + 4$

$D_f = \mathbb{R}$

$I_f = \mathbb{R}$

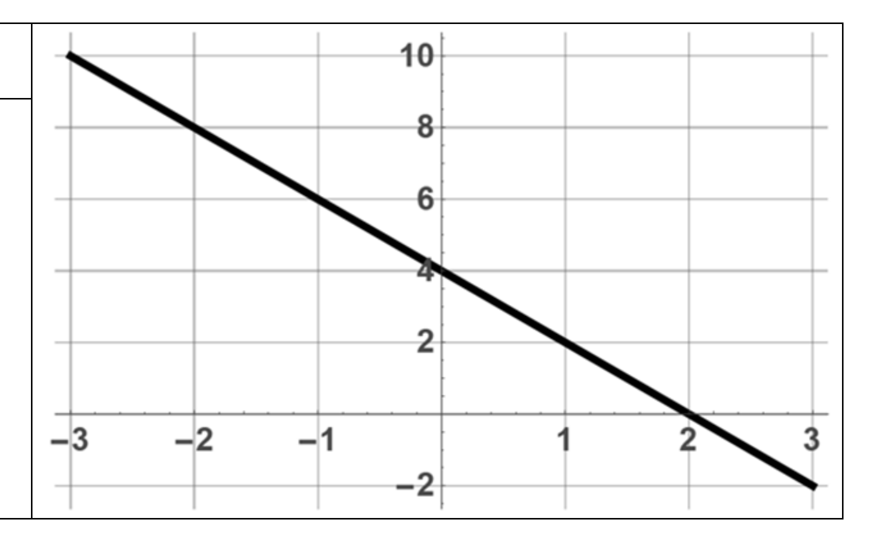
Siempre decreciente (m<0)

$a = 2$

$C^0 = \{ 2 \}$

$C^+ = (-\infty\ ;\ 2\ )$

$C^- = (\ 2\ ;\ +\infty\ )$



Forma implícita:	$A\,x + B\,y + C = 0$
Forma segmentaria:	$x/a + y/b = 1$
Forma de haz de rectas:	$y - y_0 = m\,(x - x_0)$
Función constante:	$y = cte$
La recta vertical no es función:	$x = cte$

C^0 es el conjunto de ceros de una función (valores de x donde la función vale cero).

C^+ : conjunto de positividad (valores de x donde la función es positiva).

C^- : conjunto de negatividad (valores de x donde la función es negativa).

7.2.2 Función módulo

Forma explícita: $f(x) = |x|$

Forma de función partida: $f(x) = \begin{cases} x & para \;\; x \geq 0 \\ -x & para \;\; x < 0 \end{cases}$

Ej. 7:  $f(x) = |x|$

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad I_f = \mathbb{R}_0^+$

Función par

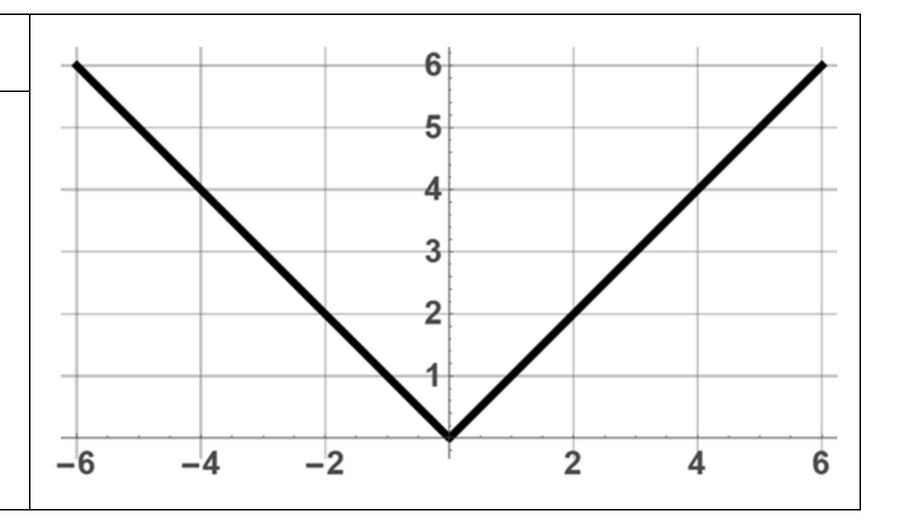
Decreciente en $(-\infty ; 0)$

Creciente en $(0 ; +\infty)$

$C^0 = \{ 0 \}$

$C^+ = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$

$C^- = \{ \}$



7.2.3 Función cuadrática

Forma polinómica: $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

Forma factoreada: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Forma canónica: $f(x) = a\,(x - x_v)^2 + \; y_v$

Es un polinomio de segundo grado con:
- a: coeficiente principal
- b: coeficiente de primer grado
- c: término independiente

Gráficamente:
- a: concavidad; si a>0 curva es cóncava; si a<0 curva es convexa
- c: ordenada al origen
- V (x_v ; y_v) es el vértice con valores: $x_v = -b/2a$; $y_v = f(x_v)$
- Eje de simetría vertical pasa por $x = x_v$

Clasificación de los ceros de la función: discriminante $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$
- $\Delta > 0$: ceros reales y distintos
- $\Delta = 0$: ceros reales e iguales (TCP)
- $\Delta < 0$: ceros no son reales

Cálculo de los ceros de la función: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2a}$

Propiedades de los ceros: $x_1 + x_2 = -b/a$ $\qquad x_1 \,.\, x_2 = c/a$

Ej. 8: $f(x) = x^2 - 4\,x + 3$

$D_f = \mathbb{R}$ $I_f = [\,-1\,;\,+\infty)$

a > 0 ⇒ curva es cóncava

Dec = $(-\infty\,;\,x_v)$; Cre = $(x_v\,;\,+\infty)$

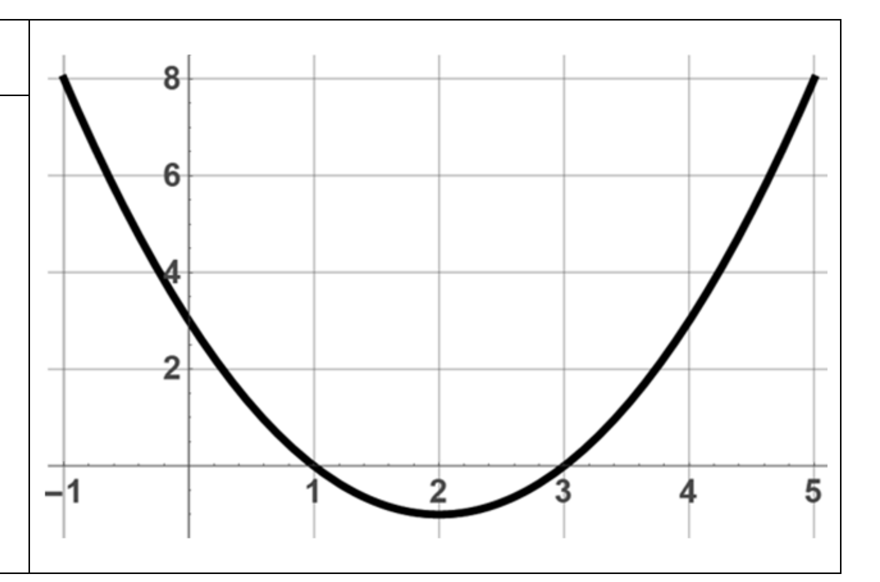
$C^0 = \{\,1\,;\,3\,\}$

$C^+ = (-\infty\,;\,1) \cup (3\,;\,+\infty)$

$C^- = (1\,;\,3)$

$x_v = 2$; $y_v = f\,(x_v) = -1$ (mínimo)

factoreada: $y = (x-1)\,(x-3)$



Ej. 9: $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

$D_f = \mathbb{R}$ $I_f = (-\infty\,;\,4\,]$

a < 0 ⇒ curva es convexa

Cre = $(-\infty\,;\,3)$; Dec = $(3\,;\,+\infty)$

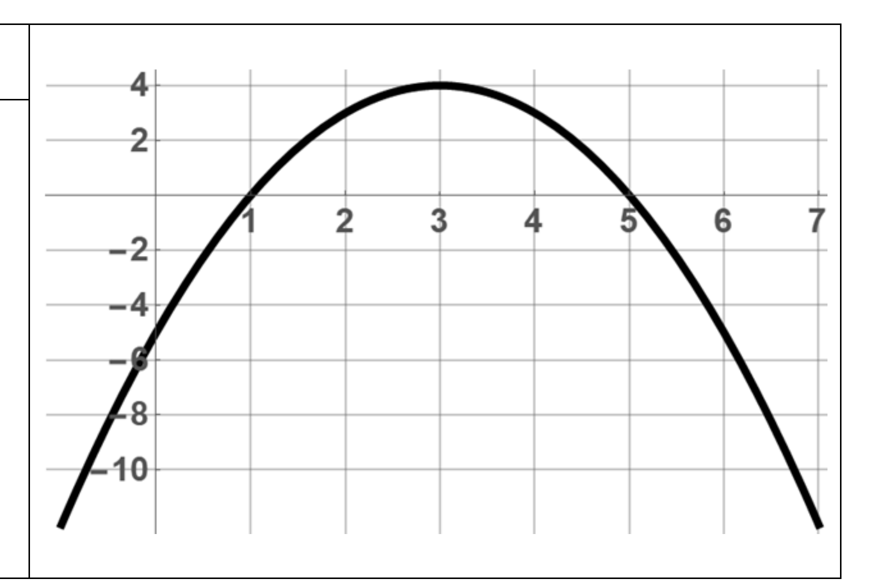
$C^0 = \{\,1\,;\,5\,\}$

$C^- = (-\infty\,;\,1) \cup (5\,;\,+\infty)$

$C^+ = (1\,;\,5)$

$x_v = 3$; $y_v = f\,(x_v) = 4$ (máximo)

factoreada: $y = -\,(x-1)\,(x-5)$



7.2.4 Función cúbica

Ej. 10: $f(x) = x^3$

$D_f = \mathbb{R}$

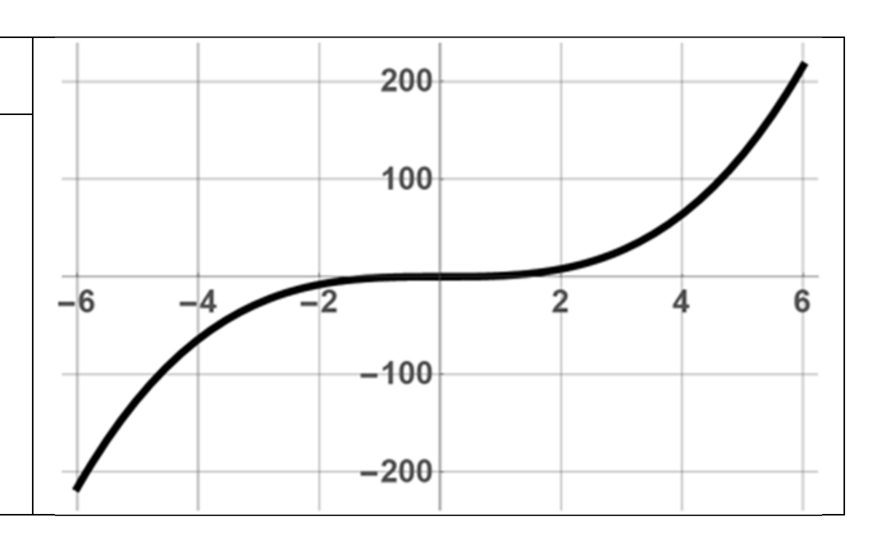
$I_f = \mathbb{R}$

$C^0 = \{\,0\,\}$

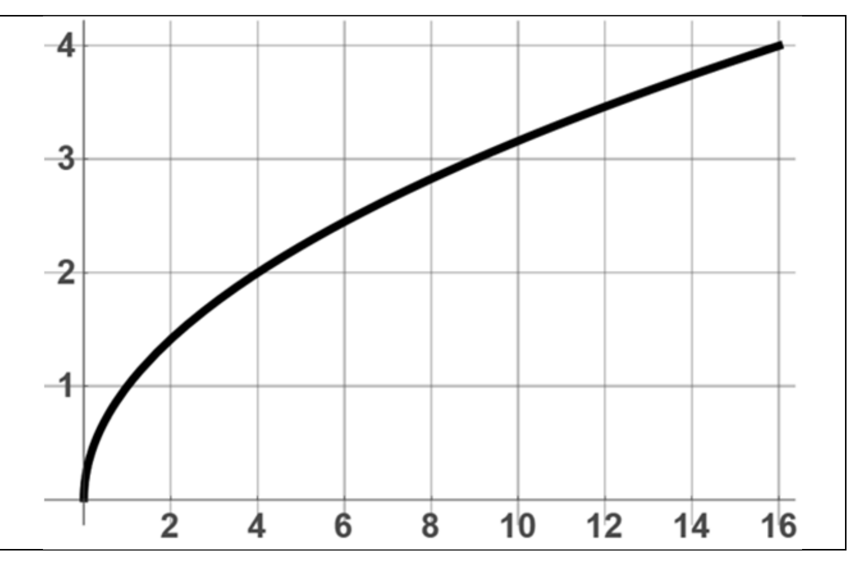
$C^+ = \mathbb{R}^+$

$C^- = \mathbb{R}^-$

Creciente en $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$



7.2.5 Función raíz cuadrada

Ej. 11: $f(x) = \sqrt{x}$	
$D_f = \mathbb{R}_0^+$ $I_f = \mathbb{R}_0^+$ Siempre creciente $C^0 = \{ 0 \}$ $C^+ = \mathbb{R}^+$ $C^- = \{ \}$	

7.3 Conjuntos dominio, imagen, y ceros de una función

7.1) Hallar dominio y ceros de la función $f(x) = -\sqrt{2-x}$

R: $D_f = (-\infty\,; 2]$ $\quad C_f^0 = \{ 2 \}$ gp

7.2) Hallar dominio y ceros de la función $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}$

R: $D_f = [3; +\infty)$ $\quad C_f^0 = \left\{ \frac{2}{3}\left(1+\sqrt{13}\right) \right\}$ gp

7.3) Hallar dominio y ceros de la función $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

R: $D_f = (-\infty\,; -1] \cup [1; +\infty)$ $\quad C_f^0 = \{-1;\ 1\}$ gp/web

7.4) Hallar dominio y ceros de la función $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

R: $D_g = \mathbb{R}^+$ $\quad C_g^0 = \emptyset$ gp

7.5) Hallar dominio y ceros de la función $h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

R: $D_h = (-\infty\,; -1] \cup \mathbb{R}^+$ $\quad C_h^0 = \{-1\}$ gp

7.6) Hallar dominio y ceros de la función $t(x) = \sqrt{\left|\frac{1}{x}+3\right| - 4}$

R: $D_t = \left[-\frac{1}{7}\ ;\ 0\right) \cup (0; 1]$ $\quad C_t^0 = \left\{-\frac{1}{7}; 1\right\}$ P1.T1.1302

7.7) Hallar dominio y ceros de la función $g(x) = \frac{\sqrt{5-|x-3|}}{x}$

R: $D_g = [-2\ ;\ 0) \cup (0; 8]$ $\quad C_g^0 = \{-2; 8\}$ gp

7.8) Hallar dominio y ceros de la función:

$$h(x) = \frac{x-3}{x\sqrt{148\,x - 4\,x^2 - 1344}}$$

R: $D_h = (16\,;21)$ $C_h^0 = \{\,\}$ pex

7.9) Hallar el dominio de la función $f: D_f \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \sqrt{q(x)}$

Sabiendo que p(x) y q(x) son polinomios con igual término independiente, y que cumplen con las siguientes expresiones:

$p(x) + q(x) = 16 - 7x$

$p(x) - q(x) = 11x$

R: $D_f = \left(-\infty\,;\,\frac{8}{9}\right]$ P1.T1.1711

7.10) Sea la función $f: D_f \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \frac{\sqrt{6\,|x|-1}}{4-2\,x^2}$. Determinar el dominio de f

R: $D_f = \left(-\infty\,;\,-\sqrt{2}\right) \cup \left(-\sqrt{2}\,;\,-1/6\,\right] \cup [1/6;\sqrt{2}) \cup \left(\sqrt{2}\,;\,+\infty\right)$ P1.T3.1302

7.11) Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = a\,x^2 + 42\,x - 58$ tal que 3 es la abscisa (x_v) del vértice de la gráfica de f . Determine el conjunto imagen de f.

R: $I_f = (-\infty\,;\,5\,]$ P1.T1.1410

7.12) Hallar el conjunto imagen de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = -3\,x^2 + 6\,c\,x - 62$ si consideramos que para todo x real se cumple que :

$f(x + 5) = f(5 - x)$ siendo c una constante distinta de cero

R: $I_F = (-\infty\,;\,13\,]$ P1.T5.1210

7.13) Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = k + \sqrt[3]{75x - 125} - x$

Para la cual: $f(5) = \sqrt[3]{2}\;k$. Determinar el conjunto de ceros de f

R: $C_f^0 = \{\,0\,;15\,\}$ Rec.1712/gp

7.14) Sean las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = -2\,(x-8)^2 + d$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = 3\,(x-1) - 15$

Sus curvas se intersectan en el vértice de la parábola. Determinar el conjunto imagen de la función f.

R: $I_f = (-\infty\,;\,6\,]$ Rec.1212

7.15) Determinar D_f e I_f de la función $f: D_f \to I_f \,/\, f(x) = \frac{|2x-1|}{2x-1}$

R: $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$; $I_f = \{-1\,;1\}$ LT-TP5-parte1-ej2

7.16) Dadas las siguientes funciones:

$h: D_h \to \mathbb{R} \;/\; h(x) = \sqrt{|5-x| - |x+2|}$ t: $D_t \to \mathbb{R} \;/\; t(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}$

Hallar el conjunto $D_h \cap D_t$

R: $S = \left(-\infty \,;\, \frac{3}{2}\right]$ LT-TP5-parte1-ej3

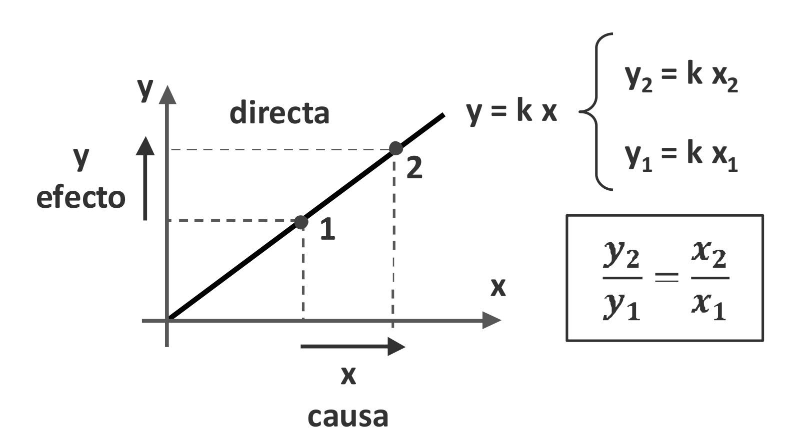
7.4 Proporcionalidad directa e inversa

Una magnitud *y varía en forma* ***directamente proporcional*** *a otra magnitud x*, cuando si varía x, la magnitud y varía proporcionalmente. Vamos a la frutería, y el monto a pagar será proporcional al peso que indica la balanza. En general se escribe:

y ∝ x y varía en forma directamente proporcional a x

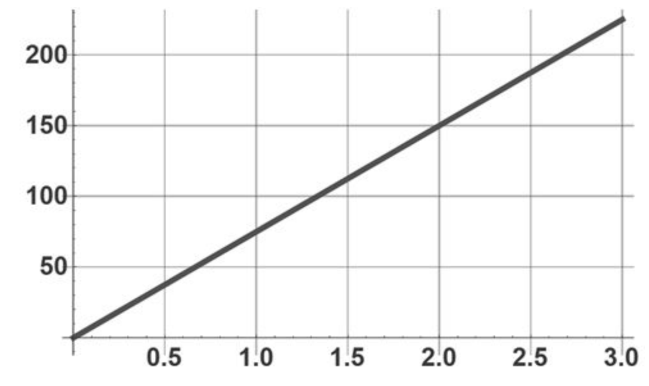
Lo que puede ser escrito como una *función lineal* que pasa por el origen:

y = k x donde k se llama constante de proporcionalidad



La utilidad de k es, (1) permitir hacer cálculos, (2) adaptar las unidades entre x e y.

Ej. N°12: una verdulería vende naranjas a un precio unitario de 75 $/kg
por ello podemos escribir la relación y ∝ k . x , o sea y = 75 $/kg . x
donde y = monto a pagar ; x = peso de las naranjas ; k = 75 $/kg
si pesamos 1,6 kg de naranjas, pagaremos y = 75 $/kg . 1,6 kg = $120



tanto si agregamos naranjas como si quitamos, el monto a pagar variará en

el mismo sentido (si x↑ entonces y↑ o al revés, pero siempre en forma proporcional), y los valores serán según la función lineal y = k x.

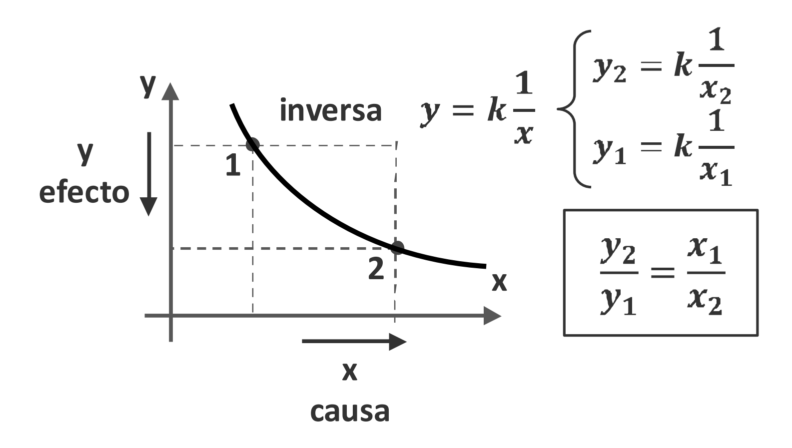
Una magnitud *y varía en forma* ***inversamente proporcional*** *a otra magnitud x*, cuando si varía x, la magnitud y varía en forma inversamente proporcional. En general se escribe:

$y \propto 1/x$ y varía en forma inversamente proporcional a x

Lo que puede ser escrito como una *función racional*:

$y = k\ 1/x$ donde k se llama constante de proporcionalidad

Notemos que, según lo visto más arriba, esto también podría expresarse como *"la magnitud y varía en forma directamente proporcional a 1/x"*.



Ej. N°13: Tres pintores, trabajando juntos, pintan una pared en un total de 30 horas, ¿cuánto tiempo tardarán cinco pintores en pintar la misma pared?

Dado lo dicho, podemos escribir la relación de proporcionalidad:

$t \propto 1 / q$

Siendo t : tiempo que tardan ; q : cantidad de pintores

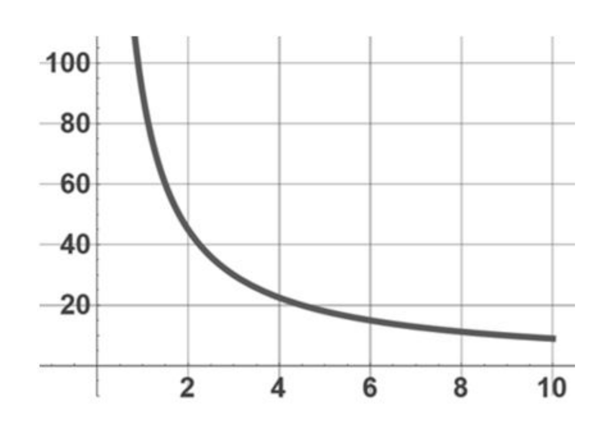
con lo cual se puede escribir la ecuación: $t = k / q$

Podemos entonces calcular la constante de proporcionalidad:

k = q . t = 3 pintor . 30 hora = 90 pintor hora

Y entonces el tiempo será:

t = k / q = 90 pintor hora / 5 pintor = 18 horas.



Ej. N°14: Una pizzería hace descuento al precio unitario de la pizza grande, lo hace a partir de la segunda unidad pedida. El descuento responde a la siguiente expresión de proporcionalidad:

descuento [$] = $240 . 1/q ; para una cantidad de pizzas q ≥ 2

Y el precio unitario de la pizza grande es $1200.

Por lo tanto: la proporcionalidad es: descuento $\propto$ 1 / q

La constante de proporcionalidad es: k = $240

Si un cliente encarga seis pizzas, el descuento a otorgar será entonces:

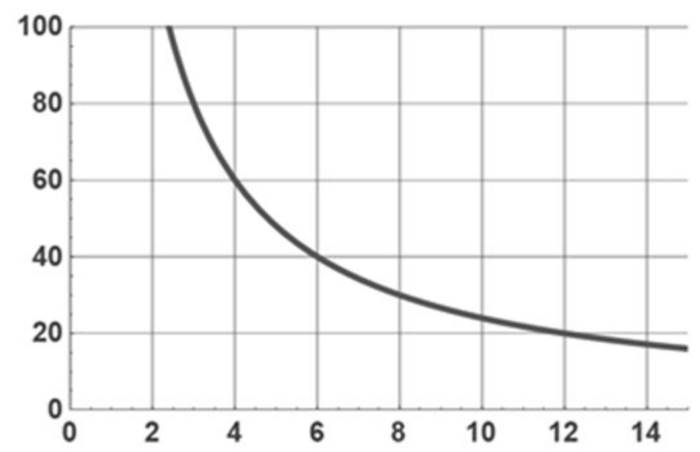
d = k / q = $240 / 6 = $40

Y el precio a pagar será: precio final = (precio de lista – desc) . 6

precio final = ($1200 - $40) . 6 = $6.960

Con lo cual el descuento otorgado fue del 3,33%.

Podríamos preguntar la razonabilidad de un descuento inversamente proporcional a la cantidad, en lugar de directamente proporcional, ¿debería ser más, o menos descuento, por cantidad? Si el descuento fuese creciente, debe haber un límite máximo que no haga perder dinero por un precio final menor a los costos. Por supuesto, si el cliente descubre esta proporcionalidad inversa, no comprará seis pizzas juntas, comprará de a dos.



ACTIVIDAD: resolver los siguientes problemas de proporcionalidad directa e inversa.

7.17) El tiempo requerido para que un ascensor suba un peso, varía en proporción directa con el producto del peso y la distancia que ha de subir; y en forma inversamente proporcional a la potencia del motor. Si el peso que se eleva disminuye un 65%, el tiempo que tarda es ahora el 70% del inicial, y el motor emplea la misma potencia, ¿cuál es la nueva distancia recorrida, en términos de la distancia inicial?

R : la nueva distancia es el doble de la distancia inicial P1.T3.0910

7.18) El costo unitario C de fabricar un motor, es proporcional a su potencia P, y es inversamente proporcional a la cantidad de motores fabricados n.

a) Escribir la ecuación que representa el enunciado, y hallar el valor de la constante de proporcionalidad k, si fabricando 100 motores de potencia 10 c/u, el costo unitario es $ 250.

b) Determinar el costo unitario de fabricar un motor de potencia 5, si se fabrican 250 motores de dicha potencia.

R: a) $C = k\,\dfrac{P}{n}$ $\quad k = 2500$ $\quad$ b) $ 50 P1.T1.1302

7.19) La resistencia eléctrica R de un alambre hecho con material conductor, varía en forma directamente proporcional a su longitud L, y en forma inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro d.

a) Escribir la ecuación de esta variación y hallar la constante de proporcionalidad, si para un alambre de dicho material que tiene L = 50 cm (longitud) y d = 5 mm (diámetro), se midió una resistencia de 120 Ω (Ohm).
b) Para otro alambre fabricado con el mismo material conductor, hallar la resistencia R cuando tiene L = 3 m y d = 8 mm

R: a) $R = k\,\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{d}^2}$ $\quad \mathrm{k} = 0{,}006\ \Omega\,\mathrm{m}$ $\quad$ b) $\mathrm{R} = 281{,}25\ \Omega$ LT-TP5-parte1-p7 / mod.gp

7.20) Treinta obreros cavan un pozo en forma cilíndrica, con diámetro de la base, igual a la profundidad. Las tres quintas partes de la tierra extraída, completan un contenedor de 1200 π m^3 de capacidad. Luego, enferman cinco obreros, motivo por el cual los restantes obreros (que trabajan con igual productividad) cavan un nuevo pozo con igual diámetro.

a) ¿Qué profundidad tiene el pozo inicial?
b) ¿Qué profundidad tiene el nuevo pozo?

R: a) 20m b) 16,7m P1.T2.18.11 / modif gp

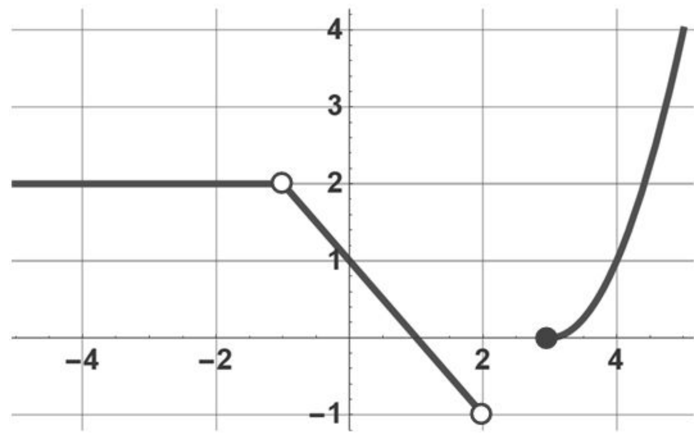
7.5 Funciones partidas

Son funciones que *parten su dominio* en distintas reglas de correspondencia.

Ej. N°15: Graficar, hallar el dominio, conjunto imagen, y ceros de la función dada por las siguientes relaciones en los reales:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = \begin{cases} 2 & ; \ x < -1 \\ -x+1 & ; \ -1 < x < 2 \\ (x-3)^2 & ; \ x \geq 3 \end{cases}$$

Lo más cómodo es empezar por graficar cada tramo:



Los huecos en x=−1 y x=2 indican que ahí no hay función, mientras que el punto sólido en x=3 indica que ahí sí, la hay. Y por supuesto hay un tramo en 2 < x < 3 donde no hay función tampoco.

Ya estamos en condiciones de responder los conjuntos pedidos:

Df = (-∞ ; -1) ∪ (1 ; 2) ∪ [3 ; +∞)

If = (-1 ; +∞)

Hay dos ceros, uno en el tramo y = – x + 1 otro en la función cuadrática, por lo tanto:

$C^0 = \{1 ; 3\}$

<u>ACTIVIDAD</u>: resolver los siguientes problemas de funciones partidas.

7.21) Dada la función partida:

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ h(x) = \begin{cases} x^3 + 24\,x^2 + 101\,x - 126 & ; \quad x < -3 \\ |\,3x + 2\,| - 8 & ; \quad x \geq -3 \end{cases}$$

Determinar analíticamente el conjunto de ceros de la función h.

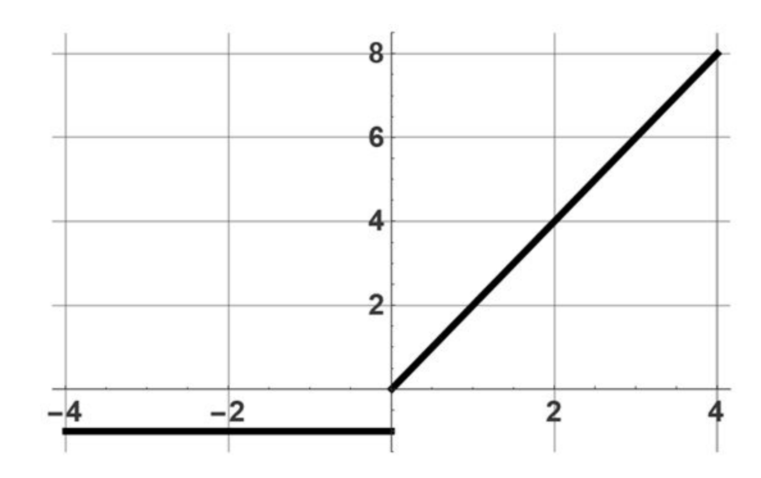
R: $C_h^0 = \{-18 \,;\, -7 \,;\, 2\}$ P1.T3.1410

7.22) Representar gráficamente las siguientes funciones partidas. Determinar dominio e imagen de c/u de ellas.

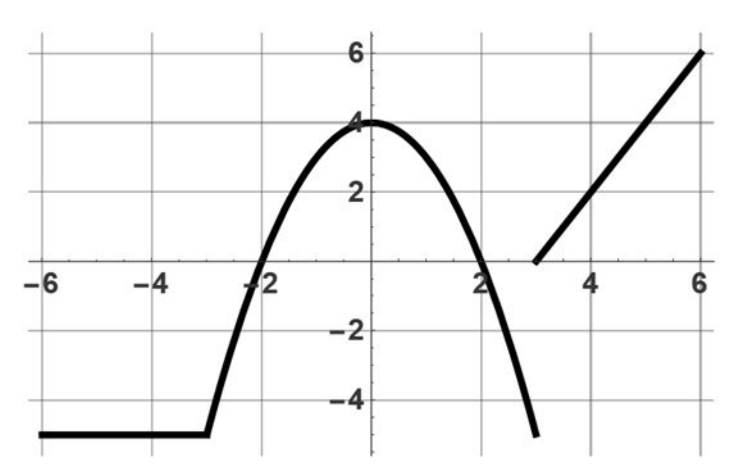
$$a)\ f(x) = \begin{cases} -1 & para \quad x \leq 0 \\ 2\,x & para \quad x > 0 \end{cases}$$

$$b)\ h(x) = \begin{cases} -5 & para \quad x < -3 \\ 4 - x^2 & para \quad |x| \leq 3 \\ 2x - 6 & para \quad x > 3 \end{cases}$$

R: a) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathrm{I}_f = \{-1\} \cup \mathbb{R}^+$ LT-TP5-parte1-ej1



R: b) $\mathrm{D}_h = \mathbb{R}$; $\mathrm{I}_h = (-5\,;\, +\infty)$

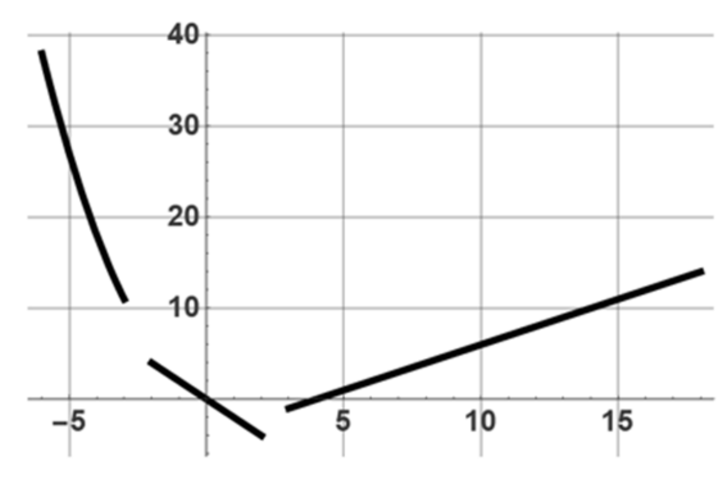


7.23) Representar gráficamente las siguientes funciones partidas, y determinar los conjuntos dominio e imagen de c/u de ellas.

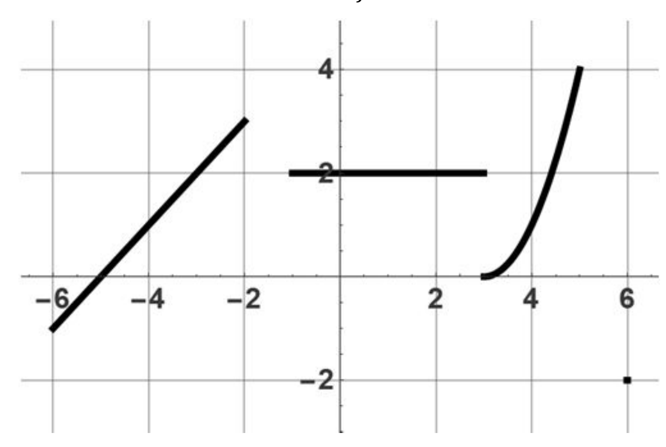
$$a)\ g(x) = \begin{cases} x^2+2 & si \quad -6<x<-3 \\ -2x & si \quad -2<x<2 \\ x-4 & si \quad x>3 \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} x+5 & si \quad -6< x<-2 \\ 2 & si \quad -1\le x\le 3 \\ (x-3)^2 & si \quad 3<x\le 5 \\ -2 & si \quad x=6 \end{cases}$$

R: a) $\mathrm{D}_g = (-6;-3) \cup (-2;2) \cup (3;+\infty)$ $\mathrm{I}_g = (-4;+\infty)$ gp



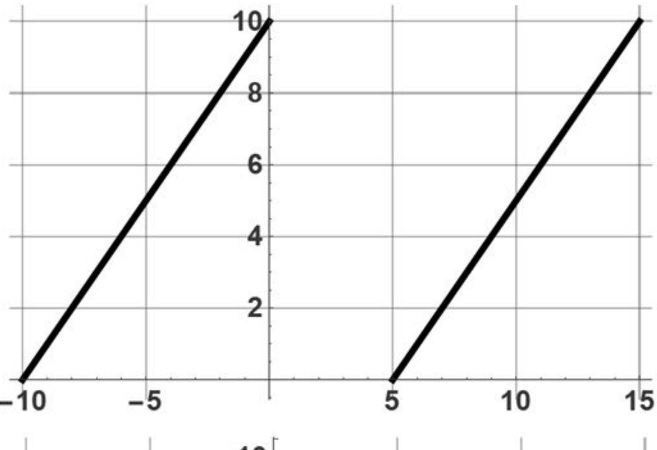
R: b) $\mathrm{D}_f = (-6;-2) \cup [-1;5] \cup \{6\}$ $\mathrm{I}_f = \{-2\} \cup (-1;4]$



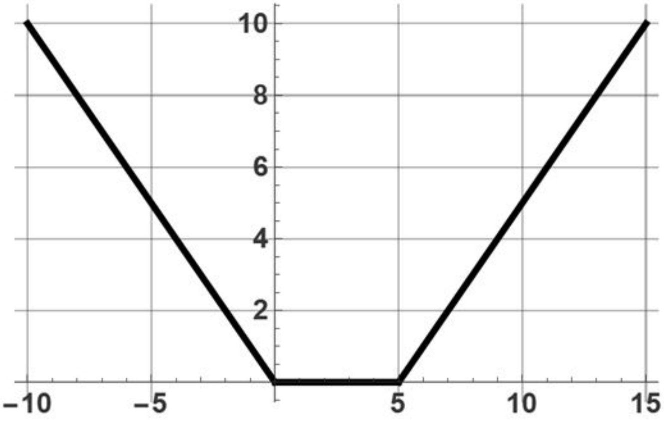
7.24) Escribir la expresión analítica de las funciones partidas cuyas representaciones

gráficas se muestran a continuación:

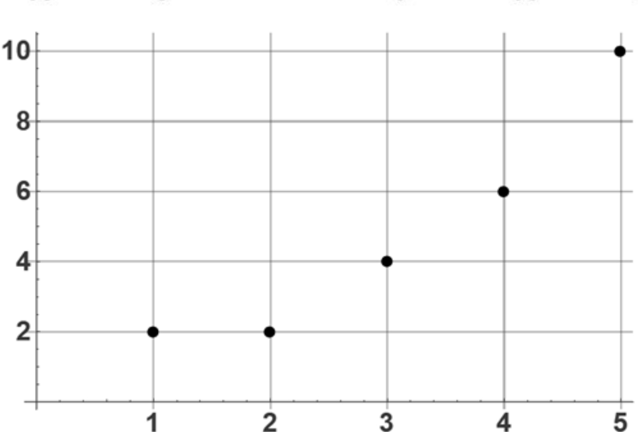
a) La gráfica de la función f es:



b) La gráfica de la función g es:



c) La gráfica de la función h es



R: $a)\ f(x) = \begin{cases} x+10 & para \quad -10 \leq x \leq 0 \\ x-5 & para \quad 5 \leq x \leq 15 \end{cases}$

$$b)\ g(x) = \begin{cases} -x & si \quad -10 < x < 0 \\ 0 & si \quad 0 \leq x < 5 \\ x-5 & si \quad 5 \leq x \leq 15 \end{cases}$$

c) La función son los pares ordenados h = { (1;2) , (2;2) , (3;4) , (4;6) , (5;10) }

7.6 Ecuaciones funcionales

Ecuaciones donde uno de los miembros es función de una variable, pero el otro es una expresión en otra variable. No son ecuaciones donde haya que despejar una incógnita "x", acá hay que hallar la función f(x). Recordemos que una función puede verse como

una *transformación* o *procesamiento* hecho a una información de entrada, para obtener información de salida. Supongamos una ecuación funcional como la siguiente:

Ej. N°16: $$f(x+1) = x^2 - 3x + 2$$

Hallemos, como ejemplo, antes, el valor de f(0). Para eso, deberá ser x=-1 de manera que f(x+1)= f(0). Por lo tanto para saber cuánto vale f(0) debemos reemplazar en el segundo miembro x=-1:

$f(0) = (-1)^2 - 3 . (-1) + 2 = 1+3+2 = 6$

Vale decir estamos trabajando en un miembro con una variable, en el otro miembro, con otra. Este es el motivo de hallar f(x).

Volviendo a pensar en el problema, para hallar f(x) hay dos métodos[5].

Método 1:

Consiste en modificar el segundo miembro para hacer aparecer la variable entre paréntesis (en este caso x+1).

$$f(x+1) = [(x+1)-1]^2 - 3[(x+1)-1] + 2$$

Y ahora cambiando la variable, por ej si llamamos z=x+1

$$f(z) = [z-1]^2 - 3[z-1] + 2$$

Y no importa la letra que le pongamos, lo que importa es que la información de salida esté en función de la misma variable que a la entrada, o sea en lugar de z podemos poner cualquier otra letra, por ej x:

$$f(x) = [x-1]^2 - 3[x-1] + 2$$

Sólo queda operar y simplificar

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 3x + 3 + 2$$
$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 5x + 6}$$

Método 2:

Consiste en reemplazar directamente la variable del primer miembro, por ej. haciendo que t=x+1, luego donde dice x reemplazar x = t – 1

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2$$
$$f(t) = t^2 - 2t + 1 - 3t + 3 + 2 = t^2 - 5t + 6$$

Y como dijimos antes, lo que importa no es la letra que le pongamos como entrada, lo que importa es que la información de salida esté expresada con esa misma variable. De manera que podemos poner x en lugar de t:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 5x + 6}$$

Ej. N°17: Obtener f(x) dada la ecuación funcional: $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{x^2+4x+4}{8x}$

Recordemos que el camino es lograr que en ambos miembros esté la misma variable, cualquiera sea su nombre. Por ej. haciendo:

$$t = \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow x = \frac{2t+2}{t-1}$$

[5] Muy buena explicación en el video: https://youtu.be/31lS1qr0nho

Y reemplazando t en el segundo miembro, logramos la misma variable:

$$f(t) = \frac{\left(\frac{2t+2}{t-1}\right)^2 + 4\left(\frac{2t+2}{t-1}\right) + 4}{8\left(\frac{2t+2}{t-1}\right)} \quad \text{simplificando:} \quad f(t) = \frac{t^2}{t^2-1}$$

Con lo cual ya tenemos la misma letra por lo tanto: $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}}$

Hallar f(x) en las siguientes ecuaciones funcionales:

7.25) $f(2x+3) = \sqrt{4x^2 - 1}$

R: $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ gp

7.26) $f(x^2) = \dfrac{1 - x^2}{x^4 - 2}$

R: $f(x) = \dfrac{-x + 1}{x^2 - 2}$ gp

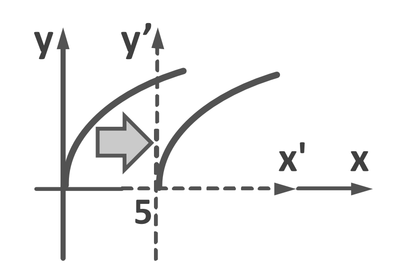
7.27) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

R: $f(x) = 1/\text{x}\ \left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right)$ youtube: canal Prime Newtons

7.7 Transformaciones de una gráfica

7.7.1 Desplazamiento horizontal y vertical

Supongamos querer desplazar la función $y = \sqrt{x}$ horizontalmente 5 unidades a derecha.



Sería como hacer $y' = \sqrt{x'}$ en un nuevo par de ejes x'y' centrado en (5 ; 0):

La relación entre las distintas coordenadas será: x' = x – 5

y' = y

Relacionando las coordenadas: $y' = \sqrt{x'}$

$y = \sqrt{x - 5}$

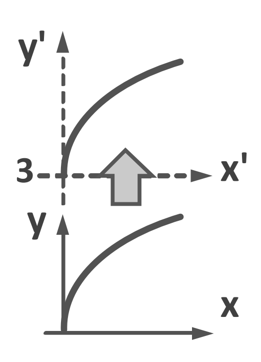
De manera que, en general, podemos decir que:

a) <u>DESPLAZAMIENTO EN EL EJE X</u>

Una gráfica se desplaza en el eje x > 0, tanto como una constante h, cuando en la fórmula se reemplaza la variable x por x – h. Si h > 0, se desplaza a derecha (sentido x>0), en caso contrario se desplaza a izquierda (sentido x<0).

b) <u>DESPLAZAMIENTO EN EL EJE Y</u>

Con similar análisis, si queremos desplazar la función $y = \sqrt{x}$ verticalmente 3 unidades hacia arriba, es como si pusiéramos una nueva función $y' = \sqrt{x'}$ en un nuevo par de ejes x'y' centrado en (0 ; 3):



La relación entre las distintas coordenadas será: x' = x   y' = y – 3

Relacionando las coordenadas: $y' = \sqrt{x'}$ $y - 3 = \sqrt{x}$

Por lo tanto, podemos decir, en general, que una gráfica se desplaza en el eje y > 0, tanto como una constante k, cuando en la fórmula se reemplaza la variable y por y – k. Si k > 0, se desplaza "hacia arriba" (sentido y>0), en caso contrario se desplaza hacia abajo (sentido y<0).

<u>Ej. N°18</u>: Desplazar la función y = 2x

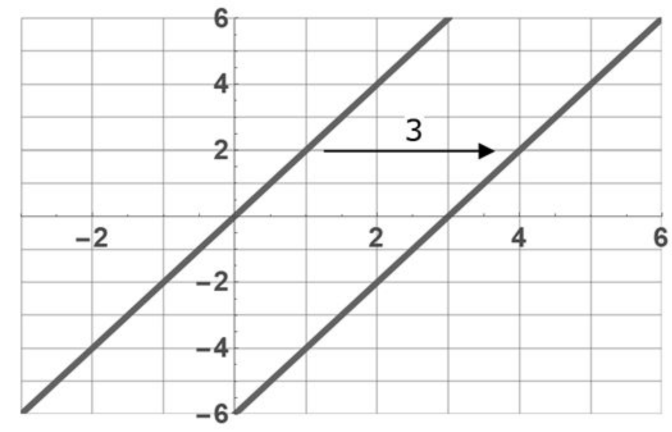
3 unidades a derecha

Conforme lo visto en el apartado 7.7.1 la fórmula queda:

y = 2 (x – 3)

y = 2x – 6

Graficando ambas funciones:



<u>Ej. N°19</u>: Desplazar la función y = |x|

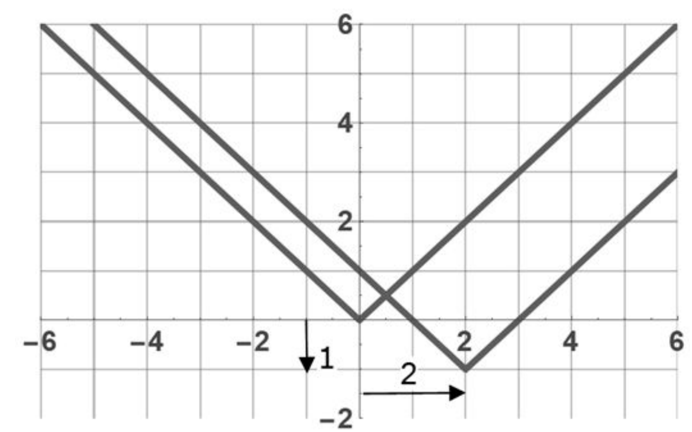
2 unidades a derecha ; 1 unidad abajo

Conforme lo visto en el apartado 7.7.1 la fórmula queda:

y + 1 = |x-2|

y = |x-2| - 1

Graficando ambas funciones:



Ej. N°20: Desplazar la función $y = x^2$

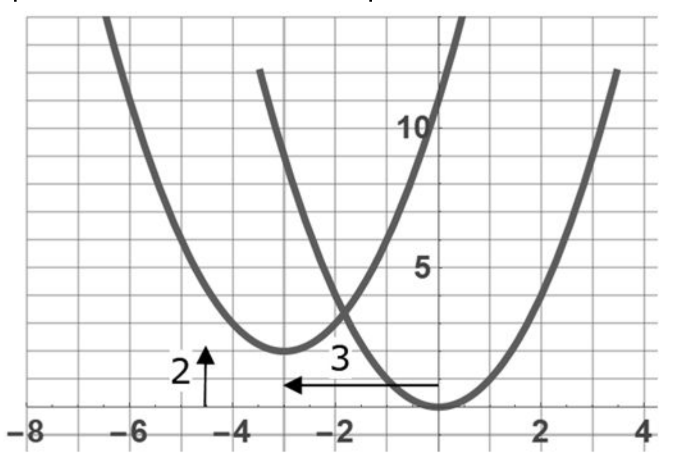
3 unidades a izquierda ; 2 unidades arriba

Conforme lo visto en el apartado 7.7.1 la fórmula queda:

$y - 2 = (x+3)^2$

$y = (x+3)^2+2$

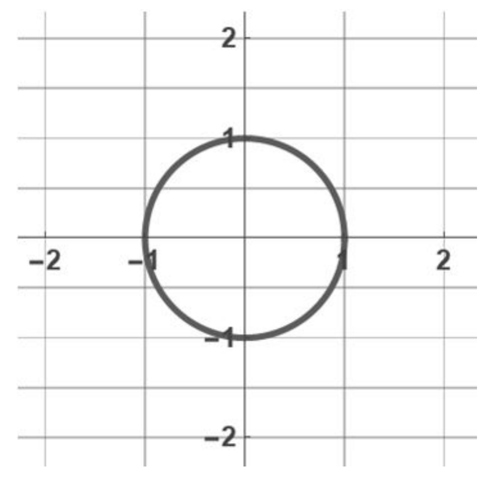
Graficando ambas funciones:



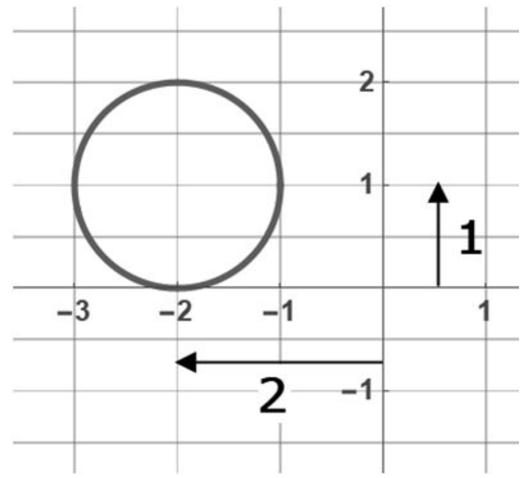
Ej. N°21: El desplazamiento funciona para cualquier representación gráfica, aunque no sea una función explícita. Veamos por ej. la ecuación siguiente:

$x^2 + y^2 = 1$

Su representación gráfica es una circunferencia centrada en el origen:



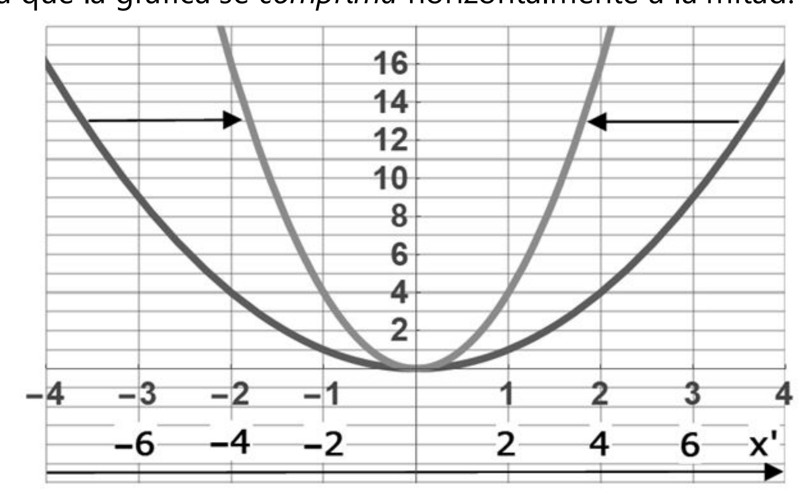
Si la queremos desplazar, por ejemplo, 2 unidades a izquierda, 1 unidad hacia arriba, aplicamos lo ya visto y queda: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$



7.7.2 Compresión o expansión en un eje

También llamado *cambio de escala*. Tiene que ver con expandir o comprimir el gráfico horizontalmente (eje x), o expandir o comprimir el gráfico verticalmente (eje y). Eso ocurre cuando multiplicamos la variable x (o y) por una constante k.

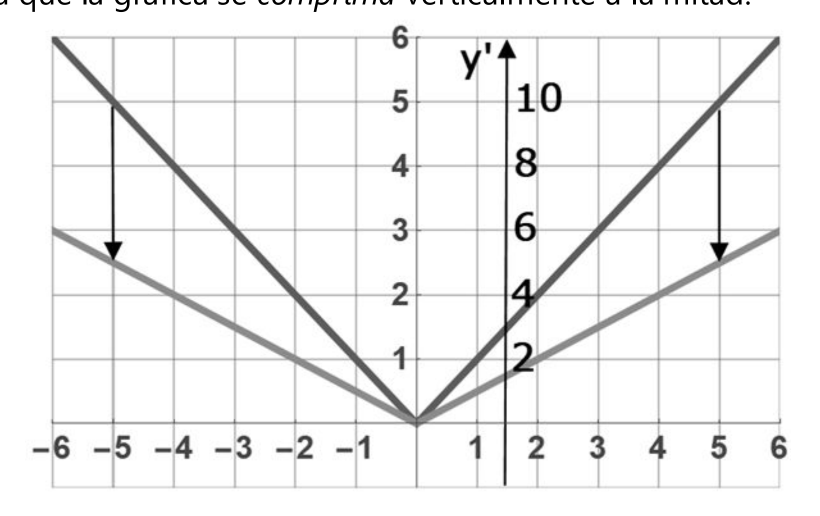
Ej. N°22: Supongamos la función $y = x^2$
Y le cambiamos la variable x por $x' = 2x$, quedando: $y = 4x^2$
Eso hará que la gráfica se *comprima* horizontalmente a la mitad:



Por lo tanto, podemos decir, en general, que una gráfica se comprime k veces en el eje x, cuando en la fórmula se reemplaza la variable x por $x' = kx$. Si $k > 1$, se comprime horizontalmente, en caso que $k < 1$ se expande horizontalmente.

De la misma manera, una gráfica se comprime k veces en el eje y, cuando en la fórmula se reemplaza la variable y por $y' = kx$. Si $k > 1$, se comprime verticalmente, en caso que $k < 1$ se expande verticalmente.

Ej. N°23: Supongamos la función $y = |x|$
Si cambiamos y por $y' = 2y$, queda: $2y = |x|$, o sea $y = 1/2\ |x|$
Eso hará que la gráfica se *comprima* verticalmente a la mitad:



7.8 Uso de la función cuadrática en inecuaciones

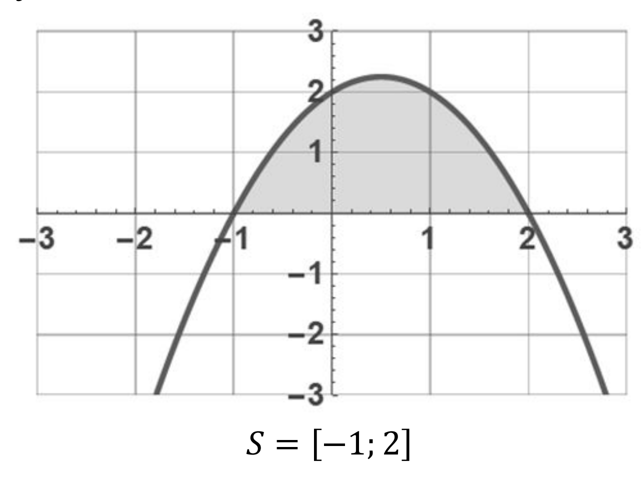
Si tenemos que resolver una inecuación cuadrática, podemos asociar el polinomio a una función cuadrática, donde de ella se pretende obtener el conjunto de positividad, de negatividad, o combinaciones de ambas.

Ej. N°24: Hallar el conjunto solución de − (x+1) (x-2) ≥ 0

El polinomio ya viene factoreado, por lo tanto la función cuadrática asociada es:

f(x) = − (x+1) (x-2)

Cuya gráfica es de fácil construcción. La solución pedida es el conjunto de positividad, unión el conjunto de ceros de f(x), es decir la zona sombreada:

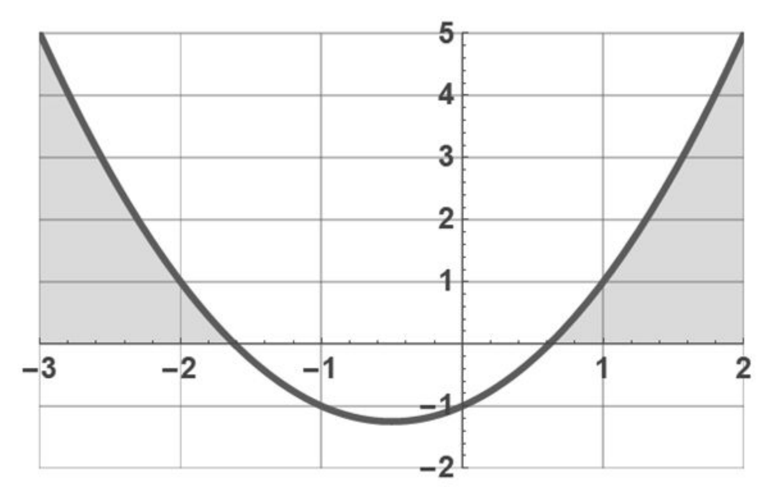


$$S = [-1; 2]$$

Ej. N°25: [R1.P1.T3.ej5a.23.03] Hallar el conjunto de los números reales cuya distancia al número uno sea menor que el cuadrado del número.

$\lvert x - 1 \rvert < x^2$	la inecuación que leemos
$x - 1 < x^2 \quad \veebar \quad x - 1 > -x^2$	aplicando propiedad 5 de inecuaciones
$x^2 - x + 1 > 0 \quad \veebar \quad x^2 + x - 1 > 0$	fabricando el cero
$x^2 - x + 1 = 0 \quad \veebar \quad x^2 + x - 1 = 0$	factoreando
$F\ (\Delta < 0) \quad \veebar \quad \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$	la primera no tiene raíces reales, la otra tiene dos

Por lo tanto la solución pedida es solucionar la inecuación cuadrática: $x^2 + x - 1 > 0$, y ahí es donde viene el uso de la función cuadrática para resolver inecuaciones.



La solución es el conjunto de positividad de la función cuadrática $f(x) = x^2 + x - 1$, es decir la parte sombreada.

$$S = \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right)$$

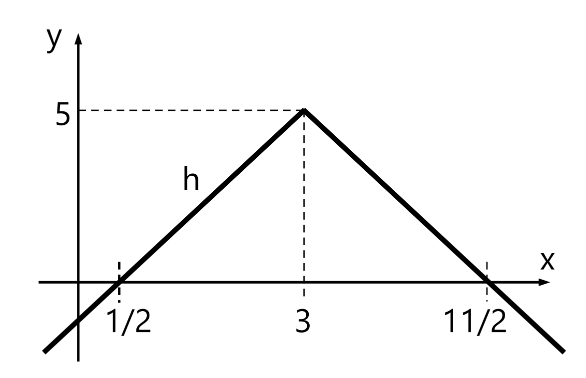
7.28) Resolver las inecuaciones cuadráticas de los problemas 5.43 al 5.50 (inecuaciones cuadráticas), llegando a los mismos resultados del capítulo de inecuaciones, pero hacerlo usando la función cuadrática, su gráfica, su conjunto de ceros, positividad, y negatividad:

5.43)	$x^2 - 4\,x - 5 < 0$	$C^0 = \{-1\,;5\}$
		$C^- = (-1\,;5\,)$
		$C^+ = (-\infty\,;\,-1) \cup (5\,;\,+\infty)$
5.44)	$\dfrac{1}{2}x^2 + 5\,x + 8 \geq 0$	$C^0 = \{-8\,;-2\}$
		$C^- = (-8\,;-2\,)$
		$C^+ = (-\infty\,;\,-8) \cup (-2\,;\,+\infty)$
5.45)	$3\,x^2 - 11\,x - 4 \leq 0$	$C^0 = \{-1/3\,;4\}$
		$C^- = (-1/3\,;4\,)$
		$C^+ = (-\infty\,;\,-1/3) \cup (4\,;\,+\infty)$
5.46)	$3\,x^2 - 6\,x + 3 < 0$	$C^0 = \{\,1\,\}$
		$C^- = \emptyset$
		$C^+ = \mathbb{R} - \{\,1\,\}$
5.47)	$x^2 - 2\,x \geq 0$	$C^0 = \{0\,;2\}$
		$C^- = (0\,;2)$
		$C^+ = \mathbb{R}^- \cup (2\,;\,+\infty)$
5.48)	$3\,x^2 - 1 \leq 2$	$C^0 = \{-1\,;1\}$
		$C^- = (-1\,;1\,)$
		$C^+ = (-\infty\,;\,-1) \cup (1\,;\,+\infty)$
5.49)	$-x^2 - 2x + 35 \leq 0$	$C^0 = \{-7\,;5\}$
		$C^- = (-\infty\,;\,-7) \cup (5\,;\,+\infty)$
		$C^+ = (-7\,;5\,)$
5.50)	$-2\,x^2 + 2\,x + 4 > 0$	$C^0 = \{-1\,;2\}$
		$C^- = (-\infty\,;\,-1) \cup (2\,;\,+\infty)$
		$C^+ = (-1\,;2\,)$

7.9 Mezcla de problemas diversos

7.29) Sea la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \;/\; h(x) = -2\,|x - a| + b$; siendo 1/2 y 11/2 los ceros de la función. Hallar las constantes positivas a y b. Representar gráficamente indicando el conjunto imagen de h.

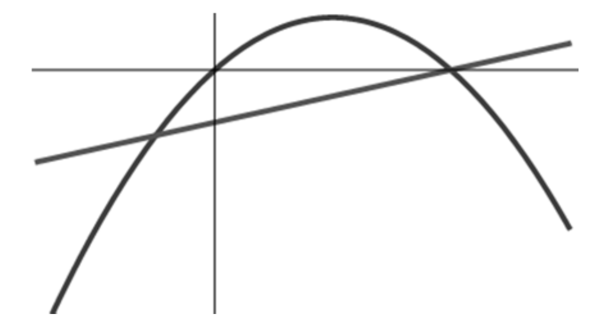
R : a=3 ; b=5 ; $I_H = (-\infty ; 5]$ pex



7.30) Si $y = 3x^2 - kx - 1$ es la ecuación de una parábola, al mismo tiempo $y = kx - 2$ es la ecuación de una recta. Hallar la constante k, tal que la parábola y la recta se intersecten en un único punto.

R : $k = \{\sqrt{3}\,;\, -\sqrt{3}\}$ P1.T5.1510

7.31) La parábola del gráfico siguiente pasa por los puntos (1,3) y (5,-5), y la recta pasa por los puntos (2,-2) y (-2,-6).



Hallar:

a) La ecuación de la recta
b) La ecuación de la parábola
c) Las coordenadas de los puntos de intersección recta – parábola
d) Las coordenadas del vértice de la parábola

R: a) $y = x - 4$ b) $y = -x^2 + 4x$ LT-TP5-parte1-ej5 / agreg gp

c) $(4{,}0)\ y\ (-1, -5)$ $d)\ V\ (2\,;4\,)$

7.32) Escribir las fórmulas de las funciones que expresen:

a) A(x) : área A de un triángulo equilátero en función de su perímetro x
b) A(L) : área A de un hexágono regular en función del lado L del hexágono

R: a) $A(x) = \sqrt{3}\ \frac{x^2}{36}$ b) $A(L) = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,L^2$ LT-TP5-parte1-prob1ab

7.33) Entre dos torres que están a 100m una de la otra, y ambas de 30m de altura, se tiende un cable de comunicaciones; el que adopta por gravedad, una curva parabólica. La altura mínima del cable sobre el suelo es de 5 m. Encontrar la ecuación de la parábola suponiendo que esta es simétrica respecto del eje y.

R: $y(x) = \frac{1}{100}\frac{1}{m}\ x^2 + 5\,m$ LT-TP5-parte1-prob3

7.34) Dos agencias de alquiler de autos sin chofer, cobran según el siguiente esquema de tarifas, donde "x" son los km recorridos, "y" son pesos a cobrar al cliente.

Agencia N°1: y(x) = 5 x + 20

Agencia N°2: y(x) = 2 x + 32

Determinar cuál es más barata y en qué circunstancias

R: recorriendo hasta 4 km, es más barata la N°1, cuestan lo mismo ambas para x = 4 km, y recorriendo más de 4 km, es más barata la N°2 gp

7.35) Si a la función f (x) = | x – 2 | que por ser función módulo, tiene dos ramas perpendiculares, la modificamos de manera que quede g (x) = | 3x − 2 |. ¿Siguen siendo perpendiculares las dos ramas en la nueva función g? Justificar la respuesta analíticamente.

R: las ramas que tiene g no son perpendiculares entre sí, porque sus pendientes no cumplen con la relación $m_1 \cdot m_2 = -1$ gp

7.36) Una función lineal f pasa por los puntos P_1 (1;2) y P_2 (5;4).

a) Hallar la ecuación de la recta r_1 correspondiente a dicha función, y expresarla en forma explícita.
b) Hallar la ecuación de la recta $r_2 \perp r_1$ que pasa por P_2, y expresarla en la forma implícita.
c) Calcular la distancia desde P_2, hasta la ordenada al origen de r_2.

R: a) r_1 : y = ½ x + 3/2 b) r_2 : 2x + y - 14 = 0 c) $\sqrt{125}$ gp

7.37) Sea la función $f\colon D_f \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \frac{1}{|5-3x|-13}$

Determinar el conjunto A = { x / x ∈ D_f ∧ f (x) < 0 }

R: $A = (-8/3\,;6)$ Rec.1212

7.38) Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = 3\,x^2 + |k|x + 75$ que posee un único cero.

Determinar el conjunto solución de la siguiente inecuación:

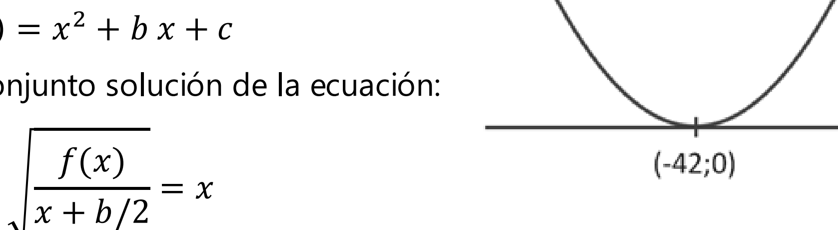
$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| \geq 4$$

R: $S = (-\infty\,; -34/3\,] \cup [-26/3; 0) \cup \mathbb{R}^{+}$ P1.T55.1802

7.39) La figura muestra la curva representativa de la función cuadrática:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2 + b\,x + c$

Determinar el conjunto solución de la ecuación:

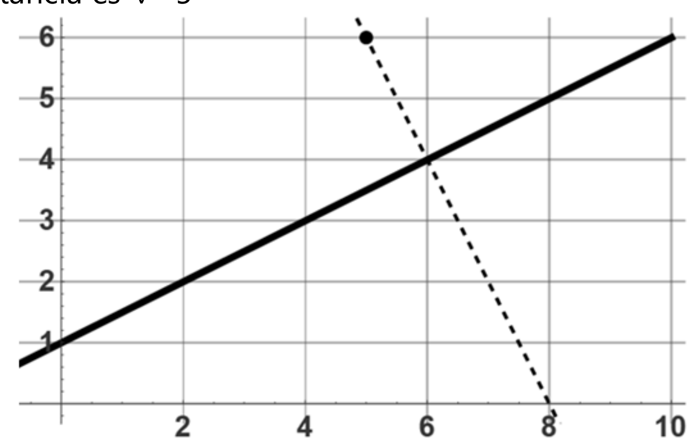


$$\sqrt{\frac{f(x)}{x + b/2}} = x$$

R: $S = \{-6\,; 7\,\}$ P1.T55.1802

7.40) Conocida la recta de ecuación: y = ½ x + 1; hallar la distancia desde la recta hasta el punto (5 ; 6). Graficar. (Nota: la distancia punto - recta, se mide sobre la perpendicular a la recta).

R: la distancia es √‾5 gp



7.41) Determinar para qué valores reales de k, la parábola de ecuación $y = x^2 + x + 3$ intersecta a la gráfica de la función $y = k\,x^2 + 5x + 1$. Hallar, también, dicho punto de intersección.

R: k = -1 intersección en (1 ; 5) R1.T3.20.02

7.42) Hallar la ecuación de la funciones lineales siguientes, sabiendo que cada una de ellas pasan por los siguientes dos puntos:

a) f (5) = 3 f (1) = −1 b) g (2) = 0 g (-1) = 4 c) h (-3) = 2 h (5) = 1

R: a) f(x) = x – 2 b) g(x) = –4/3 x + 8/3 c) h(x) = –2x – 4 kg.func.20.ej1/mod

7.43) La recta r es paralela a la recta y = −2x + 6; también pasa por el punto (1 ; −4). Hallar la ecuación de la recta r

R: (y + 4) = –2 (x – 1) kg.func.20.ej2

7.44) Considerar la recta r, cuya ecuación es $-x + 3y = 4$. Escribir tres puntos que pertenezcan a dicha recta.

R: hay infinitos puntos posibles, puntos fáciles son los puntos (0 ; 4/3) , (-4 ; 0) , (-3 ; 1/3) kg.func.20.ej3

7.45) El punto (3; –3), ¿pertenece a la gráfica de la función $f(x) = -2x+3$?

R: Sí, porque -2 . 3 + 3 = -3 kg.func.20.ej4

7.46) Sea r la recta de ecuación $y = 2x - 1$. Hallar, si existe, para qué o valores de k, el punto (– k ; k – 10) pertenece a r.

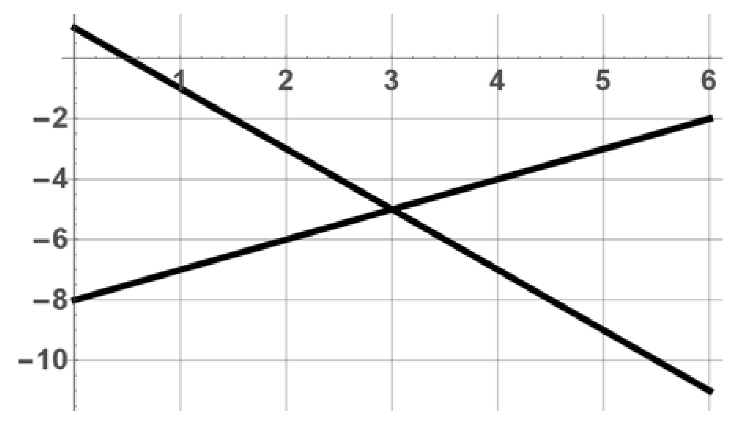
R: $k = 3$ kg.func.20.ej5

7.47) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la gráfica de $g(x) = 4x - 3$ y que pasa por el punto (5 ; 0).

R: $y = -1/4 + 5/4$ kg.func.20.ej6

7.48) Determinar analíticamente (y luego, mostrarla gráficamente) la intersección de la recta $f(x) = -2x + 1$ con la recta $g(x) = x - 8$.

R: el punto de intersección es (3 ; –5) y la gráfica es: kg.func.20.ej7



7.49) Dadas las siguientes funciones cuadráticas:

$f_1(x) = -x^2$ $f_2(x) = x^2 - 3$

$f_3(x) = x^2 + 4$ $f_4(x) = x^2 + 3x$ $f_5(x) = -x^2 + 3x + 4$

Se pide para todas y cada una de ellas:

a) Intersección con el eje de ordenadas (eje y).
b) Ecuación del eje de simetría.
c) Coordenadas del vértice.
d) Conjunto imagen.
e) Intersección con el eje de abscisas (eje x).
f) Gráfica de la función.

a) $f_1 : y = 0$
$f_2 : y = -3$
$f_3 : y = 4$
$f_4 : y = 0$
$f_5 : y = 4$

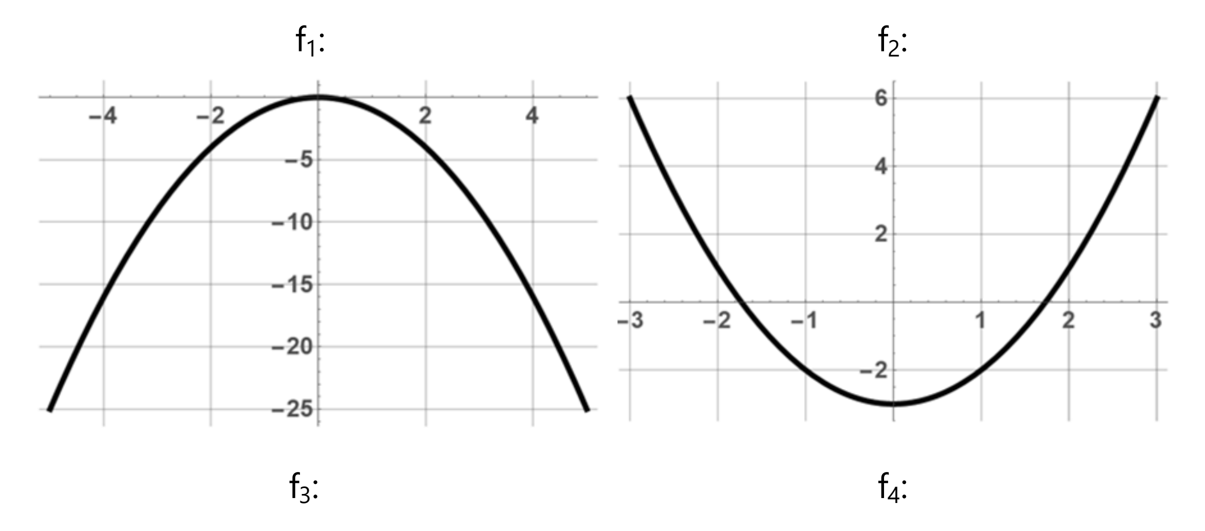
b) $f_1 : x = 0$
$f_2 : x = 0$
$f_3 : x = 0$
$f_4 : x = -3/2$
$f_5 : x = -3/2$

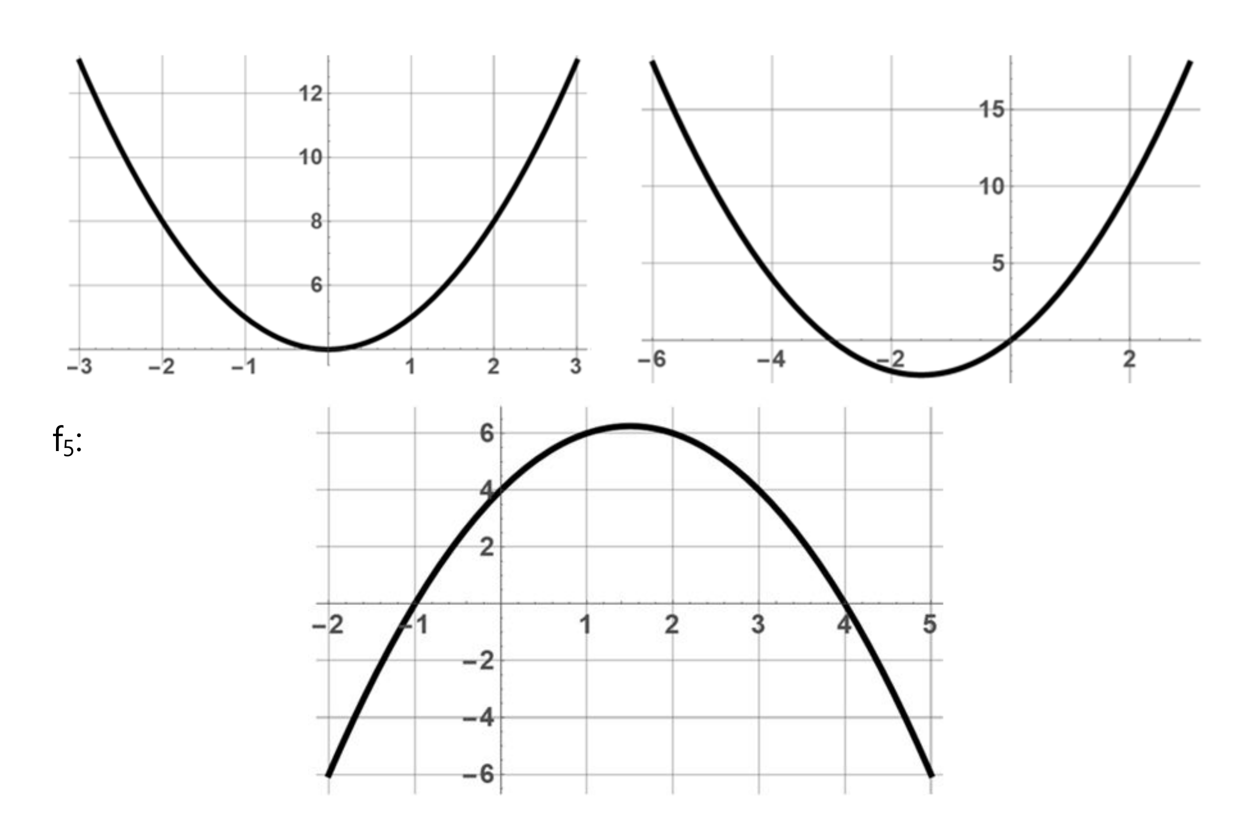
c) $f_1 : V\ (0\ ;\ 0)$
$f_2 : V\ (0\ ;\ -3)$
$f_3 : V\ (0\ ;\ 4)$
$f_4 : V\ (-3/2\ ;\ -9/4)$
$f_5 : V\ (-3/2\ ;\ 25/4)$

d) $f_1 : Im = \mathbb{R}_0^-$
$f_2 : Im = [\ -3\ ;\ +\infty\ )$
$f_3 : Im = [\ 4\ ;\ +\infty\ )$
$f_4 : Im = [\ -9/4\ ;\ +\infty\ )$
$f_5 : Im = (\ -\infty\ ;\ 25/4\ ]$

e) $f_1 : C_0 = \{\ 0\ \}$
$f_2 : C_0 = \{\ \sqrt{3}\ ;\ -\sqrt{3}\ \}$
$f_3 : C_0 = \{\quad\}$
$f_4 : C_0 = \{\ -3\ ;\ 0\ \}$
$f_5 : C_0 = \{\ -1\ ;\ 4\ \}$

Respuestas f:





7.50) La función $f(x) = (x - m)(x - n)$ corta al eje horizontal en $x = -3$ y en $x = 6$. Escribir f en forma de polinomio, y determinar el mínimo de f (x).

R: $f(x) = x^2 - 3x - 18$ mínimo de f(x) en $y = -81/4$ kg.func.20.ej9

7.51) La gráfica de $y = x^2 + bx + c$, corta al eje x en –2 y en 3. Hallar b y c.

R: $b = -1$ $c = -6$ kg.func.20.ej10

7.52) Dada la función $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$, para ella se pide:

a) Expresar la función en forma canónica (o sea en función de las coordenadas del vértice - ver punto 6.6.3).
b) Hallar el mínimo de f(x).

R: a) $2(x - 2)^2 - 3$ b) mínimo en (2 ; –3) kg.func.20.ej11

7.53) Una curva puede escribirse en la forma $y = a(x - m)(x - n)$. Se sabe que la curva corta al eje x en los valores –5 y 3. Se pide lo siguiente:

a) Expresar la curva si (–3 ; 2) es un punto de la curva
b) Coordenadas del vértice
c) Expresarla en la forma factoreada
d) Expresarla en la forma canónica
e) Graficar la curva

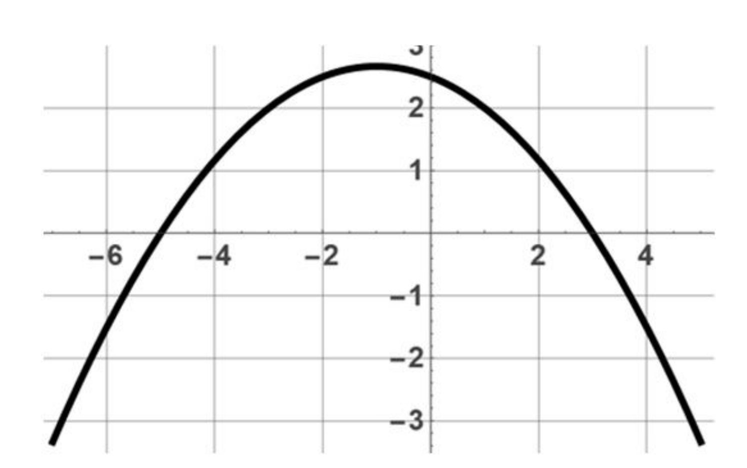
R: a) $y = -1/6\, x^2 - 1/3\, x + 5/2$ kg.func.20.ej12 / modif gp

b) V (–1 ; 8/3)

c) $y = -1/6\,(x + 5)(x - 3)$

d) $y = -1/6\,(x + 1)^2 + 8/3$

e)



7.54) Una función cuadrática vale 0 (cero) para $x = 1$, y adopta su máxima imagen, que vale 8, para $x = 4$. Hallar la expresión de f(x).

R: $f(x) = -8/9\,(x - 4)^2 + 8$ kg.func.20.ej15

7.55) Determinar las intersecciones de las funciones f y g siguientes:

$f(x) = x^2 - 6x + 5$ $g(x) = -2x^2 + x + 1$

R: son los puntos $P_1\,(1\,;\,0)$ y $P_2\,(4/3\,;\,-11/9)$ kg.func.20.ej16

7.56) Dada la función $f(x) = 3x^2 + 5x + 8$.

a) Calcular el discriminante.
b) Demostrar que $\forall x$ es verdadera la expresión $x^2 + 5x + 8 > 0$

R: a) $\Delta = -71$ kg.func.20.ej18

b) como $\Delta < 0$, no corta al eje x ; como $a > 0$ la concavidad es positiva, con lo cual, las imágenes son siempre positivas

7.57) Se conoce la función $f(x) = x^2 + x\,(2 - k) + k^2$. Hallar el rango de valores de k, que logre que siempre (en todo su dominio) sea $f(x) > 0$

R: $k \in (-\infty\,;\,-2) \cup (2/3\,;\,+\infty)$ kg.func.20.ej24

7.58) Dada la función $g(x) = 4\,x^2 + x\,(k+3) + k^2$. Hallar el rango de valores de k, que logre que siempre (en todo su dominio) la función tenga ceros reales y distintos.

R: $k \in (-3/5\,;\,1)$ gp (parecido anterior)

7.59) Determinar los valores de a (si existen) que hacen que las gráficas de las funciones f y g siguientes, se corten en un único punto.

$f(x) = -x^2 + 5x + 8$ $g(x) = ax^2 + x + 1$

R: $\Delta = 0$ por lo tanto $a = -11/7$ kg.func.20.ej26

7.60) Determinar la función cuadrática que pasa por los tres puntos de coordenadas

XY siguientes: (1 ; -1) ; (2 ; 2) ; (-3 ; -1).

R: $3/5\ x^2 + 6/5\ x - 14/5$ R1.P1.T3.Ej5b.23.03

8. GEOMETRÍA - SIN TRIGONOMETRÍA

TEMA EXPLICADO EN EL VIDEO 1.8

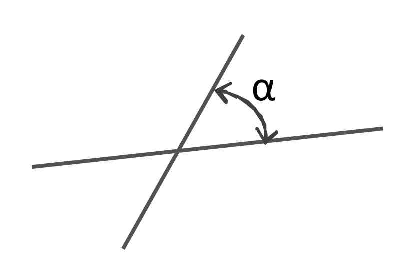


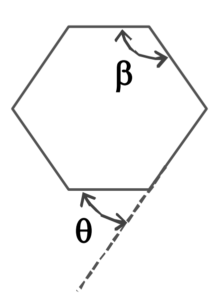
https://youtu.be/aXIotQFuKfk

8.1 Teoría sobre geometría básica

8.1.1 Rectas, paralelismo, ángulos y perpendicularidad

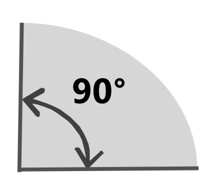
Un ángulo entre dos rectas, semirrectas, o segmentos que se cortan o se tocan, es la porción del plano abarcado por esas dos líneas. Solemos usar letras griegas:



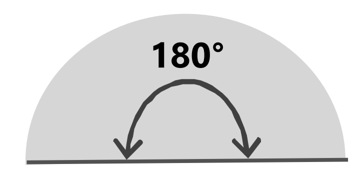


Para darle una medida a los ángulos, en grados sexagesimales:

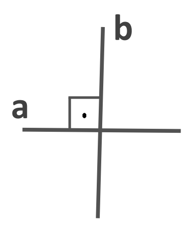
ÁNGULO RECTO (90°)



ÁNGULO LLANO (180°)



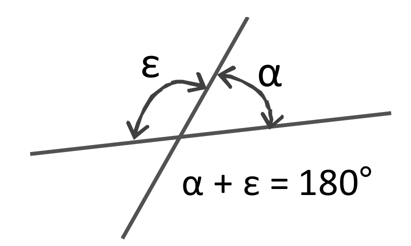
Dos rectas, segmentos, o semirrectas que están a 90°, son PERPENDICULARES.



a y b son perpendiculares ($a \perp b$)

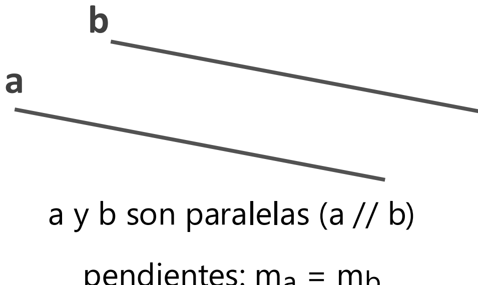
pendientes: $m_a \,.\, m_b = -1$

Ej: los siguientes ángulos suman 180°



PARALELISMO

Dos rectas son PARALELAS cuando el ángulo entre dichas rectas es 0°



a y b son paralelas (a // b)

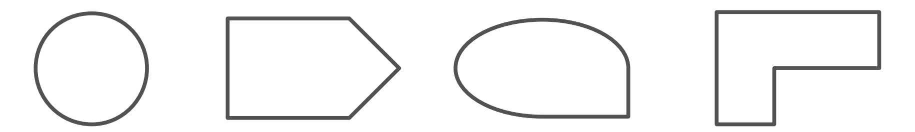
pendientes: $m_a = m_b$

8.1.2 Distancia, perímetro, área, volumen

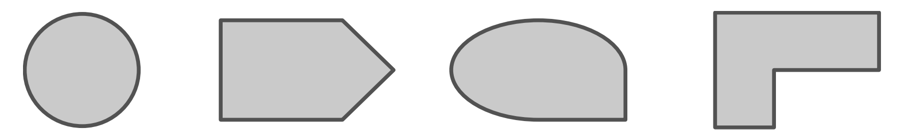
Distancia es la longitud que hay entre dos puntos, tomada en línea recta. Si entre dos puntos se traza una curva regular con centro en un punto, eso se llama **arco** de circunferencia. Todo arco tiene también una longitud, llamada longitud del arco.



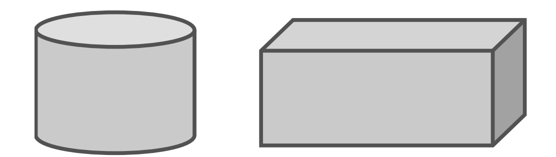
Perímetro es la longitud del contorno de una figura plana cerrada. El perímetro tiene **una dimensión [m]**. El perímetro de una circunferencia se llama longitud de la circunferencia.



Área es la región del plano que una figura plana y cerrada, abarca en su interior. Tiene **dos dimensiones [m^2]**. Es lo sombreado en las siguientes figuras:



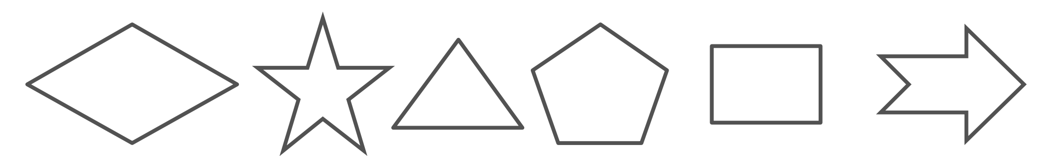
Volumen es la región del espacio que ocupa un cuerpo, sustancia, o gas. Tiene **tres dimensiones [m^3]**. Se llama capacidad al volumen que es capaz de contener un recipiente. Una botella de capacidad 500 cm^3, es capaz de contener ese volumen de sustancia.



8.1.3 Polígonos

Un polígono es una figura geométrica plana y cerrada, limitada por n **segmentos** (rectos) llamados **lados**, que unen puntos llamados **vértices**. Los polígonos se clasifican

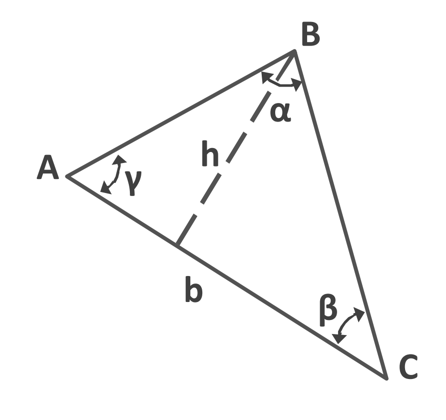
según la cantidad de lados como triángulos (3 lados), cuadriláteros (4), pentágonos (5), hexágonos (6), heptágonos (7), octógonos (8), eneágonos (9), decágonos (10), etc.



Un polígono es **regular**, cuando todos sus lados y ángulos interiores son iguales. El área de un polígono regular es (perímetro x apotema / 2). **Apotema** es la menor distancia (línea recta) desde el centro del polígono regular, hasta cualquiera de sus lados.

Triángulos

Un triángulo es un polígono de tres lados, que unen tres vértices. Forma tres ángulos interiores. La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°.



-Los vértices del triángulo son A, B y C

-Los lados son $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$

-ÁREA DE UN TRIÁNGULO ABC = b . h / 2

-<u>base b</u>: es uno de los tres lados (cualquiera)

-<u>altura h</u>: distancia perpendicular desde el lado que se ha tomado como base, hasta el vértice opuesto.

-ángulos interiores: α + β + γ = 180°

-suplementarios de los interiores: $\alpha^{SUP}+\beta^{SUP}+\gamma^{SUP}=360°$

Según los <u>lados</u>, los triángulos se clasifican en:

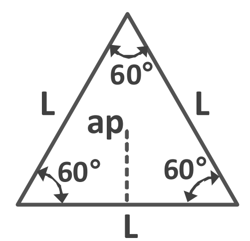
Triángulo equilátero

-3 lados iguales

-apotema = √3 / 6 L

-3 ángulos interiores de 60°

-Perímetro = 3 L   -Área = √3 / 4 L^2

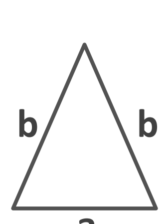


Triángulo isósceles

-2 lados iguales

-2 ángulos interiores iguales

-Perímetro = 2 a + b

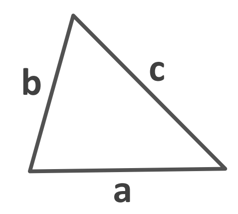


Triángulo escaleno

-todos los lados distintos

-todos los ángulos interiores distintos

-Perímetro = a + b + c



Según los ángulos, los triángulos se clasifican en:

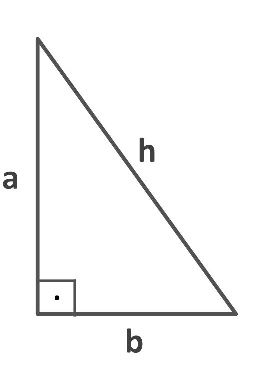
Triángulo rectángulo

-un ángulo interior es recto (90°), los otros dos ángulos son agudos (< 90°)

-el lado más grande se llama hipotenusa, y es el opuesto al ángulo recto

-los otros dos lados son adyacentes al ángulo recto y se llaman cateto mayor y cateto menor

-en los triángulos rectángulos, y exclusivamente en ellos, se cumple el **Teorema de Pitágoras** → → →



T. Pitágoras: $a^2 + b^2 = h^2$

Triángulo acutángulo	-los tres ángulos interiores agudos (< 90°) -triángulos equiláteros, son siempre acutángulos -triángulos isósceles o escalenos, pueden ser acutángulos
Triángulo obtusángulo	-un ángulo interior es obtuso (> 90°) -sus otros dos ángulos interiores son agudos -triángulos isósceles o escalenos, pueden ser obtusángulos

Cuadriláteros

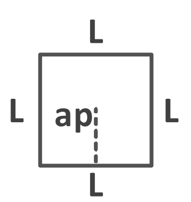
Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados, que unen cuatro vértices. Clasificación:

Cuadrado

-4 lados iguales -diagonal = $\sqrt{2}$ L

-4 ángulos interiores rectos (90°)

-Perímetro = 4 L -Área = L^2



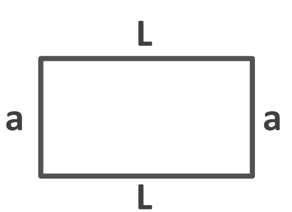
Rectángulo

-lados opuestos iguales dos a dos

-los cuatro ángulos interiores rectos (90°)

-Perímetro = 2 (L + a) -diagonal = $\sqrt{L^2 + a^2}$

-Área = L a ("largo por ancho")



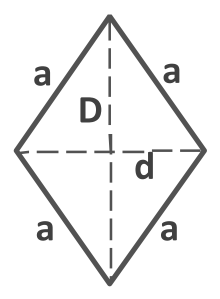
Rombo

-4 lados iguales -D: diagonal mayor -d: diagonal menor

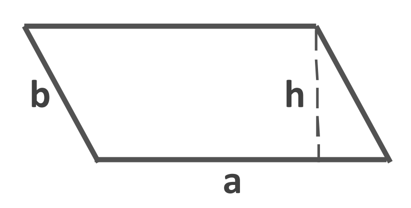
-un par de ángulos opuestos agudos (< 90°)

-un par de ángulos opuestos obtusos (> 90°)

-Perímetro = 4 a -Área = D d / 2



Romboide o paralelogramo



-lados opuestos iguales y paralelos dos a dos

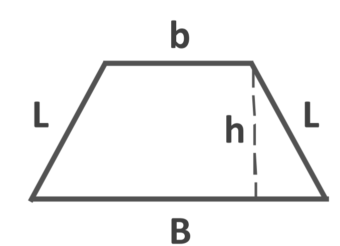
-diagonales no son perpendiculares

-dos ángulos agudos y dos obtusos

-Perímetro = 2 (a + b)   -Área = a h

-h: distancia perpendicular al lado opuesto

Trapecio

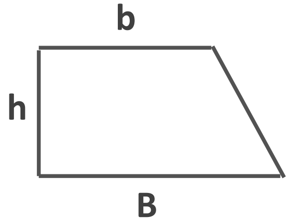


-2 lados no consecutivos paralelos, de distinta longitud, llamados base mayor y base menor

-h es la distancia perpendicular a las dos bases

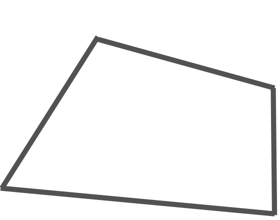
-Perímetro = B + b + 2L $Área = \frac{(B+b)\,h}{2}$

Otro ejemplo de trapecio

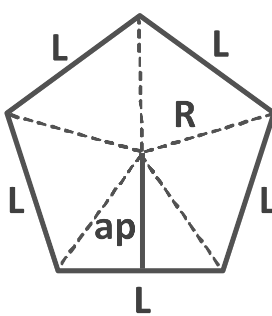


Trapezoide

-ninguno de sus lados es paralelo



Pentágono regular



-polígono regular de 5 lados, 5 triángulos isósceles

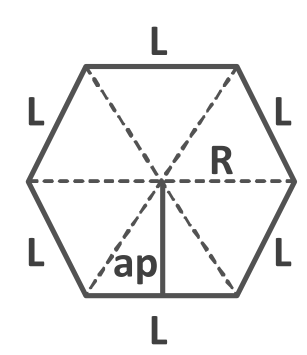
-radio: distancia del vértice al centro

-Perímetro = 5 L

-apotema = L/2 tg 54°

-Área = perím . ap / 2 = 5/4 L^2 tg 54°

Hexágono regular



-polígono regular de 6 lados, 6 triángulos equiláteros

-radio: distancia del vértice al centro

-apotema = $\sqrt{3}$ / 2 L

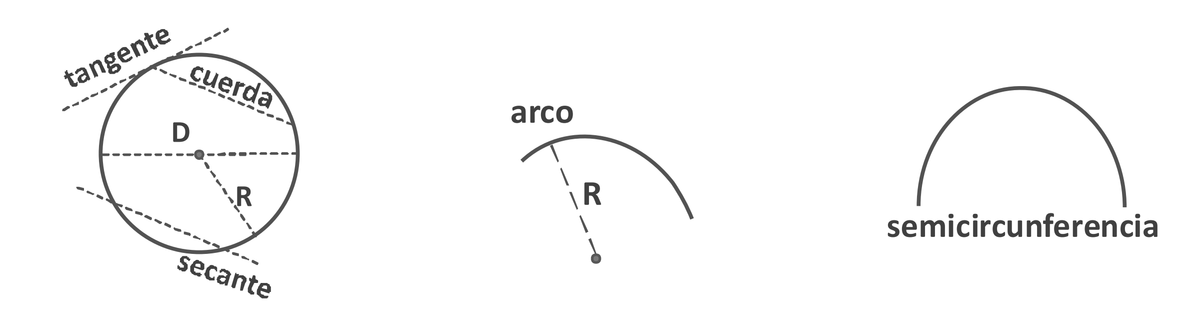
-para el hexágono regular se da que: L = R

-Perímetro = 6 L

-Área = perím . ap / 2 = 3/2 $\sqrt{3}$ L^2

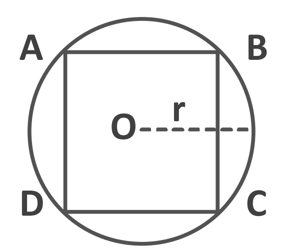
8.1.4 Circunferencia, círculo, sector circular

Una **circunferencia** es una figura geométrica plana formada por todos los puntos que equidistan de un punto central, el centro de la circunferencia. La distancia entre los puntos de la circunferencia y su centro, se llama **radio R**. La distancia entre dos puntos opuestos de la circunferencia, pasando por el centro, se llama **diámetro D** (y vale dos radios). Una circunferencia no tiene lados, sólo tiene una curva que es un giro completo de 360°.

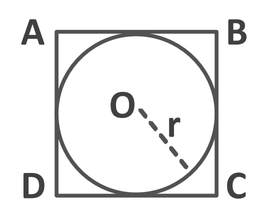


Perímetro = Longitud de la circunferencia = 2 π R = π D

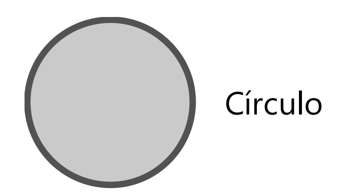

ABCD está INSCRIPTO en la circunferencia C(O,r)



ABCD está CIRCUNSCRIPTO en la circunferencia C(O,r)



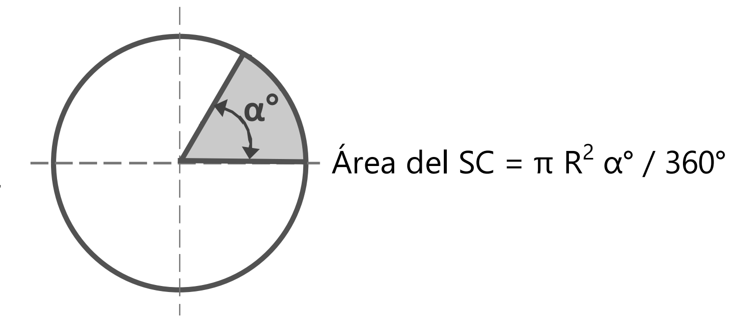
Círculo es la superficie plana que abarca una circunferencia en su interior.



Círculo

Área del círculo = $\pi R^2 = \pi D^2 / 4$

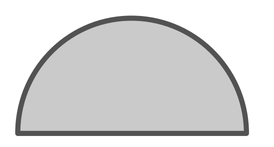
Un **sector circular** es una porción de un círculo, abarcada por un ángulo α (alfa). Su área es proporcional al ángulo que abarca.



Área del SC = $\pi R^2 \alpha° / 360°$

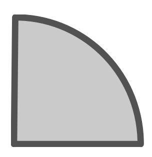
Semicírculo

-Área es 1/2 del círculo (180°) = $\pi R^2 / 2$



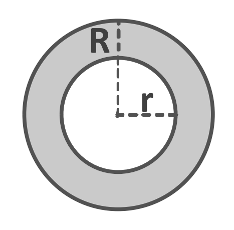
Cuarto de círculo

-Área es 1/4 del círculo (90°) = $\pi R^2 / 4$



Corona circular

-Área = $\pi (R^2 - r^2)$

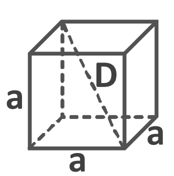


8.1.5 Cuerpos

Cubo (hexaedro regular)

-6 caras planas cuadradas -diagonal = $\sqrt{3}$ a

-Área exterior = $6 a^2$ -Volumen = a^3



Paralelepípedo rectangular (ortoedro)

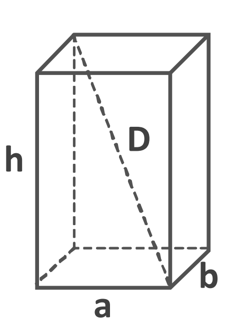
-base es un rectángulo lados a y b, altura h

-diagonal = $\sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$

-Área de la base = a b

-Área exterior = 2 (a b + a h + b h)

-Volumen = a b h



Cilindro

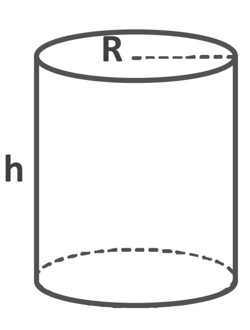
-base es un círculo -altura h

-Área de la base = πR^2

-Área exterior = $2 \pi R (h + R)$

-Área lateral = $2 \pi R h$

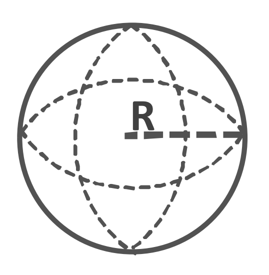
-Volumen = $\pi R^2 h$



Esfera

-Área exterior = $4 \pi R^2$

-Volumen = $4/3 \pi R^3$



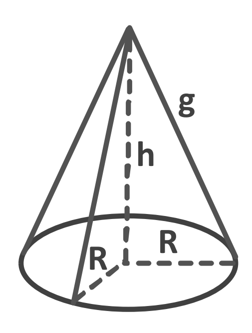
Cono

-Área lateral = π R g   g es la generatriz

-Área exterior total = π R (g + R)

-Volumen = π/3 R^2 h

-Triángulo rectángulo en R-h-g

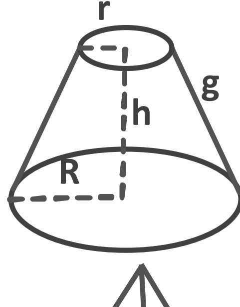


Tronco de cono

-Área exterior total = π [g (R + r) + R^2 + r^2]

-Área lateral = π g (R + r)

-Volumen = 1/3 π h (R^2 + r^2 + R r)

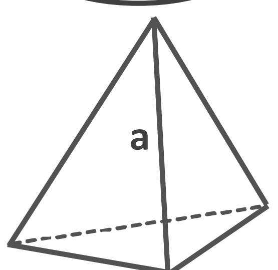


Tetraedro regular

-Cuerpo cerrado de 4 triángulos equiláteros

-Área exterior total = 4 Área cara = $\sqrt{3}\ a^2$

-Volumen = $\sqrt{2}$ / 12 a^3



Prisma

-Cuerpo cuya base es un polígono, luego el mismo polígono "sube" una altura h generando un volumen

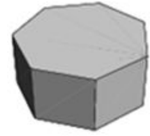
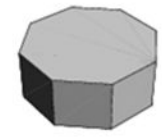
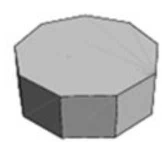
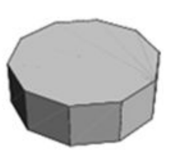
-Área exterior total = Área lateral + 2 Área base

-Área lateral = Perímetro de la base . h

-Volumen = Área base . h





También puede generarse un prisma oblicuo, cuando la base "sube" con un ángulo que no es perpendicular

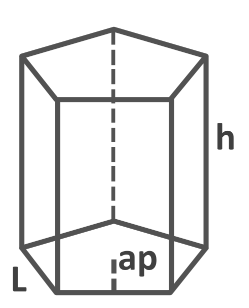
Prisma de base pentagonal

-Prisma donde la base es un pentágono

-Área lateral = 5 L h

-Área total = 5 L (h + ap)

-Volumen = 5 L ap / 2 . h



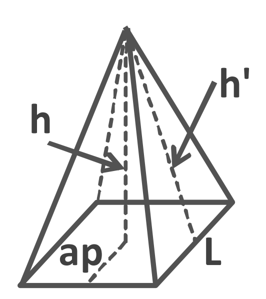
Pirámide base cuadrada

-h: altura de la pirámide   -h' del triángulo

-Área lateral = 4 área triángulo = 2 L h'

-Área total = L^2 + 2 L h'

-Volumen = L^2 h/3

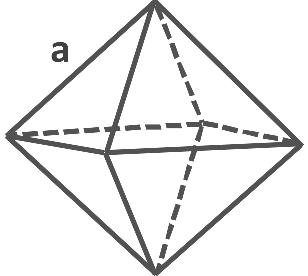


Octaedro

-Cuerpo cerrado formado por 8 polígonos

-Área exterior = $2\sqrt{3}\ a^2$

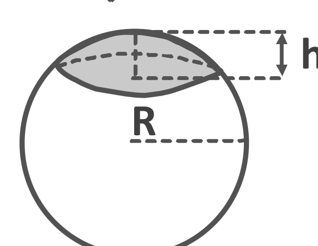
-Volumen = $\sqrt{2} / 3\ a^3$



Casquete esférico

-Área = $2\pi R h$

-Volumen = $\pi h^2 (3R - h) / 3$

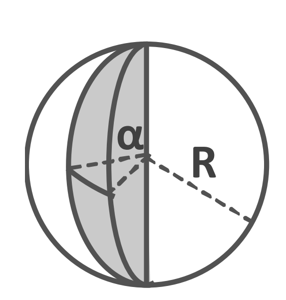


Huso esférico o cuña esférica

-Es como un gajo de una mandarina

-Área = $4\pi R^2\ \alpha°/ 360°$

-Volumen = Volumen esfera . α°/ 360°

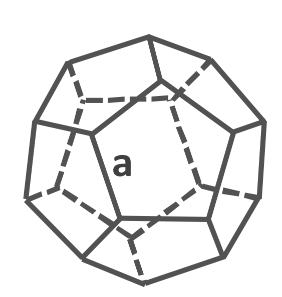


Dodecaedro

-Cuerpo cerrado formado por 12 polígonos

-Área exterior = 30 a apotema

-Volumen = $1/4\ (15+7\sqrt{5})\ a^3$

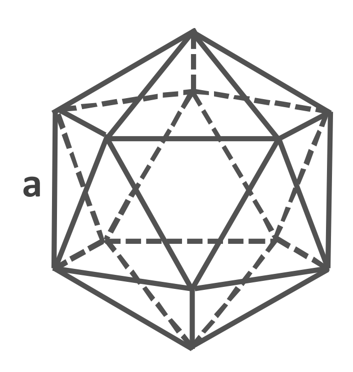


Icosaedro

-Cuerpo cerrado formado por 20 polígonos

-Área exterior = $5\sqrt{3}\ a^2$

-Volumen = $5/12\ (3+\sqrt{5})\ a^3$

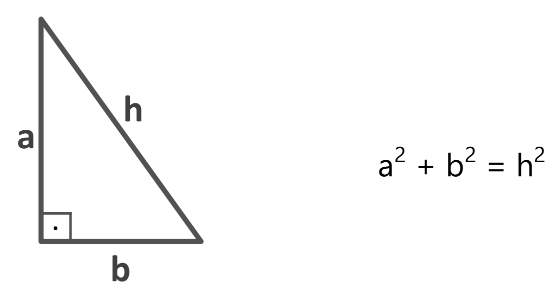


8.2 Ejemplos resueltos de geometría sin trigonometría

A continuación, algunos ejemplos sencillos para captar la técnica.

Ej. N°1: *Un triángulo rectángulo tiene como hipotenusa 5cm, y como cateto (uno de ellos) 4 cm. Hallar el otro cateto.*

La resolución debe encararse con algún conocimiento estudiado, y escribir una ecuación, inecuación, gráfico, esquema, según 1.5.1. El conocimiento que tenemos que tener estudiado antes, es el T. de Pitágoras:



$a^2 + b^2 = h^2$

Es necesario poner letras a las cosas, por ejemplo: a = 4 cm ; h = 5 cm. Colocar esto en la ecuación de manera de expresar conceptualmente:

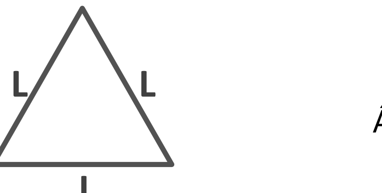
$$a^2 + b^2 = h^2 \quad \Longrightarrow \quad b = \sqrt{h^2 - a^2}$$

Recién después de la expresión conceptual, reemplazar valores:

$$b = \sqrt{(5\ cm)^2 - (4\ cm)^2} = 1\ cm$$

Ej. N°2: *Dado un triángulo equilátero que tiene lados de 6 cm, hallar el área.*

El conocimiento necesario estudiado es área de un triángulo equilátero (y T. de Pitágoras si es que queremos desarrollar la fórmula):



Área = b . h / 2 = $\sqrt{3}$ / 4 L^2

La fórmula puede usarse, o puede desarrollarse a partir de Área = b . h / 2

En este caso L = 6 cm → Área = $\sqrt{3}$ / 4 L^2 = $\sqrt{3}$ / 4 $(6\ cm)^2$= 9 $\sqrt{3}$ cm^2

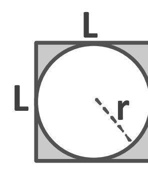
Ej. N°3: *Un cuadrado tiene Área = 16 cm^2, hallar su lado.*

El conocimiento necesario para este problema, es el área del cuadrado:

Área = L^2

Área = L^2 → L = $\sqrt{\text{Área}}$ = $\sqrt{16}$ = 4 cm

Ej. N°4: *Del siguiente cuadrado circunscripto que tiene lados de 8 m, calcular el área sombreada.*



Área círculo = $\pi\ r^2$

Área cuadrado = L^2

El conocimiento previo necesario, es entender lo visto en cuanto a "inscripto" y la diferencia con "circunscripto". Además, el área del círculo.

En este caso hay que armar lo que se pide, como una resta:

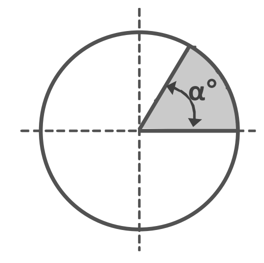
Área sombreada = Área cuadrado – Área círculo = $L^2 - \pi\ r^2$

Pero también hay que calcular el radio del círculo: $r = L/2$

Reemplazando: Área sombreada = $L^2 - \pi\ (L/2)^2 = (8m)^2 - \pi\ (4m)^2$

Área sombreada = $64\ m^2 - \pi\ 16\ m^2 = 16\ (4 - \pi)\ m^2$

Ej. N°5: *El sector circular de radio 5 cm, tiene un área de 5 π m². Hallar el ángulo α y el arco S que lo abarcan.*



Para el ángulo, el conocimiento a utilizar es conocer qué es un sector circular, y cómo se calcula su área, eso es: Área del SC = $\pi\ R^2\ \alpha° / 360°$

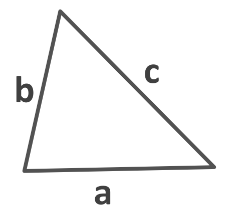
Despejando: $\alpha° = \text{Área}_{SC}\ .\ 360° / \pi\ R^2 = 5\ \pi\ m^2\ 360° / \pi\ (5m^2) = 72°$

Para el arco, el conocimiento a utilizar es la longitud de la circunferencia y su relación con un arco de circunferencia: $S = 2\ \pi\ R\ \alpha° / 360°$

$S = 2\ \pi\ 5\ cm\ 72° / 360° = 2\ \pi\ m$

Ej. N°6: *Un triángulo tiene lados de 4, 6 y 7 cm. Definir qué tipo de triángulo es, y hallar su perímetro.*

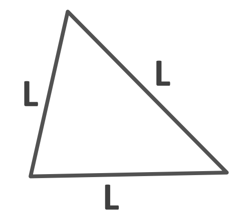
El triángulo y sus lados se deben representar de la siguiente manera:

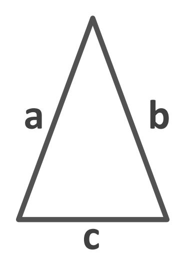


Es decir:

1) Sus lados son todos distintos, por lo tanto gráficamente deben ser distintos
2) Sus letras deben ser distintas también, porque representan cantidades distintas

Estos estarían mal →





Respondiendo la consigna, el triángulo es escaleno (respuesta pedida). El perímetro es (primero se escribe conceptualmente): Perím = a + b + c

Recién después, se reemplazan los valores:

Perím = a + b + c = 4 cm + 6 cm + 7 cm = 17 cm

Ej. N°7: *Opcional: verificar si los datos del problema N°6 corresponden efectivamente a un triángulo*

Los conocimientos que hay que tener son: *"Cada lado de un triángulo debe ser menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia"*, o sea:

$(a < b + c) \wedge (a > | b - c |)$

$(b < a + c) \wedge (b > | a - c |)$

$(c < a + b) \wedge (c > | a - b |)$

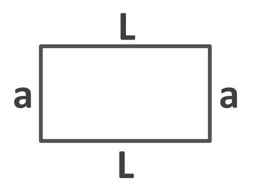
Por lo tanto sólo hay que hacer la pregunta, para los tres lados:

¿ $(4 < 6 + 7) \wedge (4 > | 6 - 7 |)$? → ¿ $4 < 13 \wedge 4 > 1$? verdadero

¿ $(6 < 3 + 7) \wedge (6 > | 4 - 7 |)$? → ¿ $6 < 10 \wedge 6 > 3$? verdadero

¿ $(7 < 4 + 6) \wedge (7 > | 4 - 6 |)$? → ¿ $7 < 10 \wedge 7 > 2$? verdadero

Ej. N°8: *Un rectángulo tiene un área de 60 m^2. Si uno de sus lados es de 4 m, hallar el valor del otro lado y el perímetro del rectángulo.*

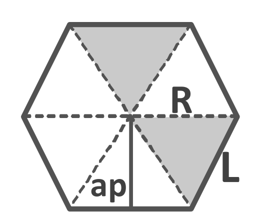


El conocimiento necesario es saber qué es perímetro y qué es área, más las fórmulas: Área = a . l (ancho por largo) ; Perím = 2 (a + l), y saber despejar.

Llamando a = 4 m ; l el lado incógnita: l = área / a = 60 m^2 / 4 m = 15 m

Perím = 2 (a + l) = 2 (4m + 15m) = 38 m

Ej. N°9: *El radio de un hexágono regular es de 5 cm. Hallar el lado, el apotema, y calcular el área sombreada.*



El conocimiento a tener previamente entendido es:

ap = $\sqrt{3}$ / 2 L

L = R

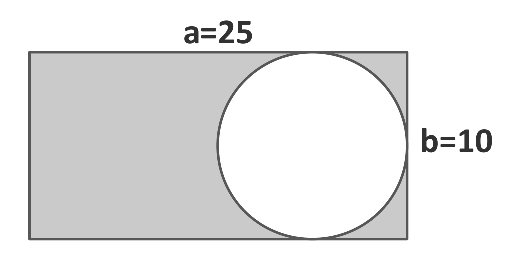
Área $_{SOMB}$ = Área hexág / 3 = 1/2 $\sqrt{3}$ L^2

De ahí, es directo que L = R = 5 cm

ap = $\sqrt{3}$ / 2 L = $\sqrt{3}$ / 2 5 cm = 5/2 $\sqrt{3}$ cm

Área $_{SOMB}$ = 1/2 $\sqrt{3}$ L^2 = 1/2 $\sqrt{3}$ $(5cm)^2$ = 25/2 $\sqrt{3}$ cm^2

Ej. N°10: *Hallar el área sombreada:*

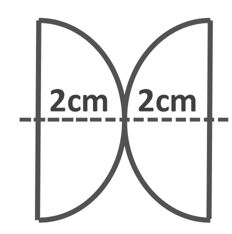


El conocimiento necesario es el área del círculo y del rectángulo

Área_{SOMB} = Área rectángulo – Área círculo = a . b – π $(b/2)^2$

= 25 . 10 – π 5^2 = 250 – 25 π = 25 (10 - π)

Ej. N°11: *Calcular la longitud de alambre que se necesita para formar la siguiente figura decorativa que se quiere poner en una puerta.*



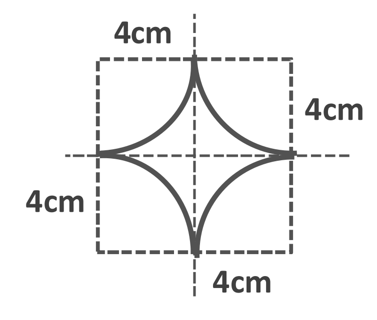
El conocimiento es longitud del arco de circunferencia, llamando R=2cm.

Longitud alambre = Long. Ɔ + Long. Ϲ + 2 Long. | = 2 Long. Ɔ + 2 Long. |

= 2 π (2R)/2 + 2 . 2R = 2 π 2cm + 2 . 2 . 2cm =

= π 4 cm + 8 cm = 4 (π + 2) cm

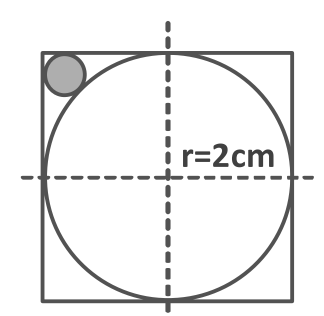
Ej. N°12: *Calcular la longitud de la estrella decorativa siguiente.*



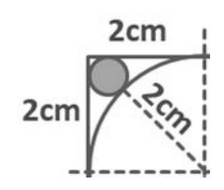
Son 4 arcos de circunferencia (de 90°) sumados con R=4cm

Longitud = 4 . πD/4 = π D = 2 π R = 2 π 4cm = 8 π cm

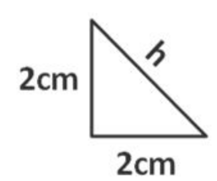
Ej. N°13: *Calcular el área del círculo sombreado.*



El radio de la circunferencia (2 cm) también puede mirarse en diagonal, en la misma línea que luego cruza al círculo sombreado:



Planteando el triángulo rectángulo siguiente, puede hallarse su hipotenusa h:

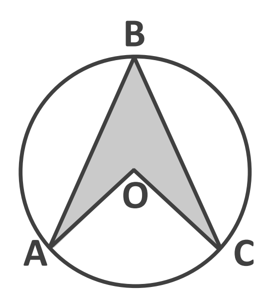


$$2^2 + 2^2 = h^2 \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{8}$$

Esa hipotenusa – 2 cm es el diámetro del círculo sombreado, por lo tanto:

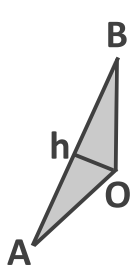
$\text{Área}_{\text{SOMB}} = \pi\ d^2/4 = \pi\ (\sqrt{8} - 2)^2\ /\ 4 = 0{,}539\ \text{cm}^2$

Ej. N°14: *[LPE-220] Determinar el área sombreada, si se sabe que el radio de la circunferencia es 5 cm y que las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden 8 cm c/u.*



El conocimiento necesario de tener aprendido es qué es una cuerda, una circunferencia, área, Pitágoras y triángulos.

En el triángulo ABO, dos de sus lados son el radio, por lo tanto es isósceles. Si tomamos como base al lado AB, su altura correspondiente divide al triángulo en dos triángulos iguales y entonces:

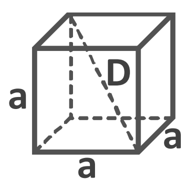


$$\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 + h^2 = r^2 \quad \Longrightarrow \quad 4^2 + h^2 = 5^2 \quad \Longrightarrow \quad h = 3$$

El área del triángulo ABO es entonces: $\text{Área}_{\text{ABO}} = \text{AB} \cdot h / 2 = 8 \cdot 3 / 2 = 12$

Y el área sombreada es el doble: $\text{Área}_{\text{SOMB}} = 2\ \text{Área}_{\text{ABO}} = 2 \cdot 12 = 24\ \text{cm}^2$

Ej. N°15: *Dado el cubo de arista 10 cm, hallar el diámetro y el volumen.*



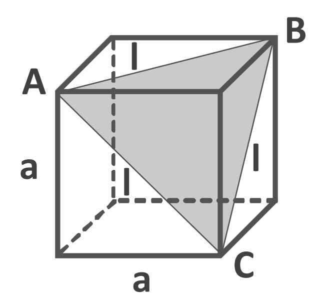
Lo que necesitamos saber es el concepto de volumen, y cómo calcular la diagonal de un cubo.

Diagonal = √3 a = √3 10 cm

Volumen = a^3 = $(10cm)^3$= 1.000 cm^3 lo podemos dejar así o convertir a m.

=10^3 $(10^{-2}$ m$)^3$= 10^3 . 10^{-6} m^3 = 10^{-3} m^3

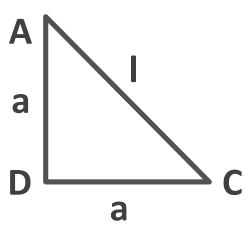
Ej. N°16: *[F.Ej5.22.03] El triángulo sombreado es equilátero, de lado l, y comparte con el cubo los vértices A, B y C. Si el área del triángulo es de 17,53 cm^2, hallar el volumen del cubo.*



El conocimiento necesario de tener sabido es volumen del cubo, área del triángulo, y teorema de Pitágoras.

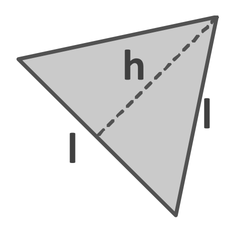
El lado l del triángulo se puede relacionar con la arista a, tomando el triángulo ACD:

$$a^2 + a^2 = l^2 \quad \Longrightarrow \quad \overline{AC} = l = \sqrt{2}\, a$$



El área del triángulo sombreado es:

$$Área = \frac{l\, .h}{2} = 17{,}53$$



Y la altura en función del lado es:

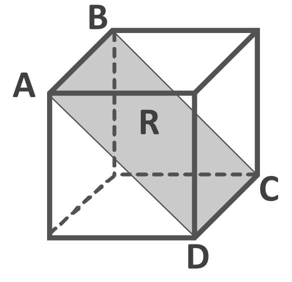
$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{3}/2\ \ l$$

De ahí, podemos despejar la arista del cubo, para hallar el volumen

$$Área = \frac{\overline{AC}\ .\ h}{2} = \frac{\sqrt{2}\, a\, .\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{2}\, a}{2} = 17{,}53 \ \Longrightarrow a = 4{,}5$$

Y dada esa arista, el volumen es: $Vol_{cubo} = 4{,}5^3 = 91{,}1\ cm^3$

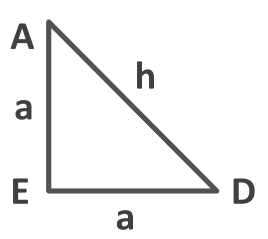
Ej. N°17: *[R1.22.02] El área del rectángulo R es de 22,63 cm^2, el mismo coincide con el cubo en dos de sus lados, y comparte los vértices ABCD. Hallar el volumen del cubo.*



Los conocimientos necesarios son volumen del cubo, área del rectángulo, y teorema de Pitágoras.

La hipotenusa del triángulo ADE, que es un lado del rectángulo, puede hallarse con:

$$a^2 + a^2 = h^2 \quad \Longrightarrow \quad \overline{AD} = h = \sqrt{2}\, a$$

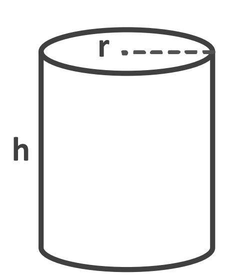


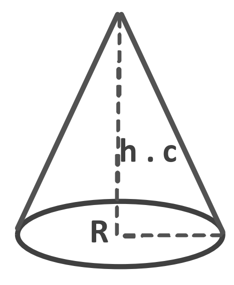
El otro lado del rectángulo es la arista, por lo tanto el área conocida:

$$Área_{rectángulo} = a\,.\,h = a\,.\sqrt{2}\,a \;\Longrightarrow\; a = \sqrt{\frac{Área_{rectángulo}}{\sqrt{2}}} = 4$$

$$Volumen_{cubo} = a^3 = 4^3 = 64\;cm^3$$

Ej. N°18: *[R1.22.02] Los dos cuerpos de la figura tienen el mismo volumen y el mismo valor de h, que en el caso del cilindro es su altura (para el cono, la altura es h multiplicado por el coeficiente "c"). Sabiendo que R = r/4, hallar el valor de c.*





Conocimientos necesarios: saber volumen del cilindro, volumen del cono, y cómo se desglosaría cada cuerpo en partes, radios, generatriz, etc.

Las ecuaciones que escribimos para este problema, son las siguientes:

Igualdad de volúmenes: $\pi\, r^2 h = \frac{1}{3}\pi\, R^2 h\; c$

Relación entre radios: $R = \frac{r}{4}$

Quedan dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (r y c):

$$3\,r^2 = R^2 c \quad ; \quad 4\,R = r$$

Una de las incógnitas es lo que pide el problema: c = 48

Ej. N°19: *[R1.22.02] Una esfera de radio r, y un cono de base circular con el mismo radio que la esfera, tienen el mismo volumen. Sabiendo que el área de la esfera es de 576π cm^2, hallar la altura del cono (en centímetros).*

Conocimientos necesarios: saber volumen de la esfera, área de la esfera, volumen del cono, y cómo se desglosaría cada cuerpo en partes, radios, generatriz, etc.

Este problema tiene la particularidad que no trae dibujos. Las ecuaciones que podemos escribir en base a lo dicho, son las siguientes:

Igualdad de volúmenes: (1) $\frac{4}{3}\pi\, r^3 = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h$

Área de la esfera: (2) $4\,\pi\,r^2 = 576\,\pi$

De la (2) podemos obtener el radio: r = 12

Reemplazando en la (1) obtenemos la altura: h = 48 cm

Ej. N°20: *[R1.21.02] El área total de un cilindro circular (el área lateral, más la base, más la tapa) es de 72 π cm², mientras que su volumen es de 80 π cm³. Hallar la altura del cilindro en centímetros. Nota: tanto el radio de la base del cilindro, como su altura, son números naturales.*

Este problema no aporta información gráfica, tenemos que manejarnos con el texto. Las ecuaciones que surgen en base a lo dicho, son las siguientes:

Igualdad de volúmenes: (1) $2\,\pi\,r\,h + 2\,\pi\,r^2 = 72\,\pi$

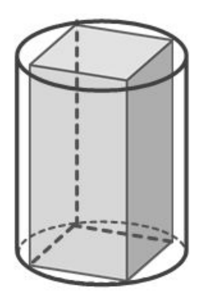
Área de la esfera: (2) $\pi\,r^2 h = 80\,\pi$

Quedan dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (r y h):

$$r\,h + r^2 = 36 \quad ; \quad r^2 h = 80$$

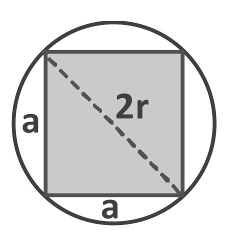
De fácil resolución, donde resulta lo pedido: h = 5 cm

Ej. N°21: *[P1.22.02] Un prisma de base cuadrada, está inscripto en un cilindro de 6 cm de altura. El volumen del cilindro es $\sqrt{24}$ π cm³, y el volumen del prisma es 4 $\sqrt{a}$ cm³. Hallar el valor de a (arista).*



Hay que saber volumen del cilindro, volumen del prisma, cuadrados, y sus partes. También, lo que significa cuadrado inscripto:

Si está inscripto, tienen la misma altura, y el diámetro de la base forma un triángulo isósceles con el cuadrad de la base:



Las ecuaciones que podemos escribir de la información leída es:

Volumen del cilindro: $\pi\,r^2 h = \sqrt{24}\,\pi$

Volumen del prisma: $a^2 h = 4\sqrt{a}$

Base (cuadrado inscripto): $a^2 + a^2 = (2r)^2$

Lo que constituye un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Solucionándolo para hallar la que nos piden: a = 6 cm

8.3 Resolver problemas de geometría sin trigonometría

ACTIVIDAD: resolver los siguientes problemas de geometría sin trigonometría, en base a los ejemplos anteriores (8.2) y recordando la secuencia de acciones vista en 1.5.1.

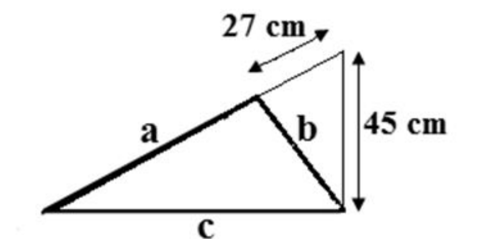
8.1) Determinar el radio de un recipiente esférico que tenga igual capacidad que un tambor cilíndrico de 1156 π cm^2 de área lateral, si sabe que el radio del cilindro es la mitad de su altura. ¿Cuál es área total de cada cuerpo, el esférico y el cilíndrico?

R: r = 19,46 cm $A_{CILINDRO}$ = 1734 π cm^2 A_{ESFERA} = 1514,78 π cm^2 P1.T1.1410

8.2) Calcular la longitud de los lados a, b y c, si los tres triángulos son rectángulos.

R: a = 48 b = 36 c = 60

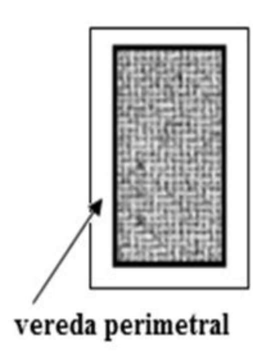
P1.T1.1410



8.3) La suma de las longitudes de los catetos de un triángulo es 1344. Al dividir la mayor longitud por la menor (de los catetos), se obtiene 1 como cociente entero, y 192 como resto. Hallar el perímetro del triángulo rectángulo.

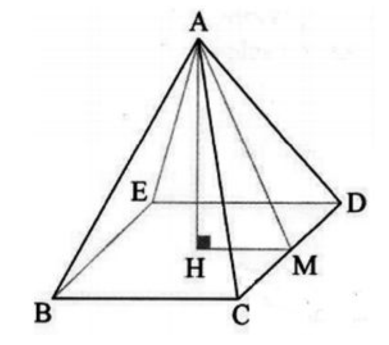
R : el perímetro es 2304 P1.T3.1410

8.4) Un granjero desea cercar un lote rectangular de terreno. Si emplea un material que cuesta \$24 por metro para el frente del lote y un material que cuesta \$21 por metro para los otros tres lados, la cerca le cuesta \$ 5895. Si usa el material más caro para los cuatro lados la cerca le cuesta \$ 6480.
Determine las dimensiones del lote.
Luego, se desea realizar una vereda perimetral de igual ancho. Para este trabajo se cuenta con cemento, que cubre un área de $994m^2$. ¿Cuál es el ancho (x) de la vereda?



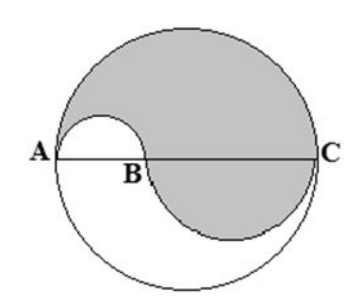
R: frente 75 m, lateral 60 m, anchura de la vereda 3,5 m P1.T2.1410

8.5) El área de la base cuadrada de la pirámide es de 1296 cm^2. El volumen total es de 18144 cm^3. Hallar el perímetro del triángulo rectángulo AHM, y el área lateral del cuerpo (formado por 4 triángulos).
M es el punto medio de la arista
H es el punto, centro del cuadrado



R: P ≅ 105,7 cm $A_{Lateral}$ ≅ 3290 cm P1.T3.1410

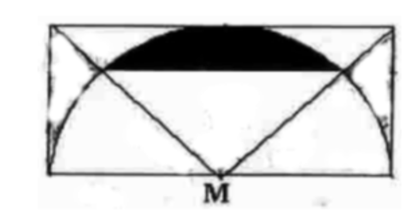
8.6) Si $\overline{BC} = 2\,\overline{AB}$ ¿qué porcentaje del área del círculo mayor está sombreada ?



R: 66,67 %

P1.T3.1410

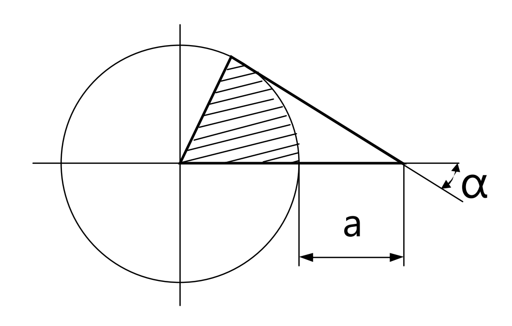
8.7) Calcule el área sombreada si sabe que el área del rectángulo es 392 cm^2, si uno de sus lados mide 28 cm, y M es el punto medio de la base, y la base es además el diámetro de la semicircunferencia inscripta.



R: Área = 49 (π - 2) cm^2

LPE-412

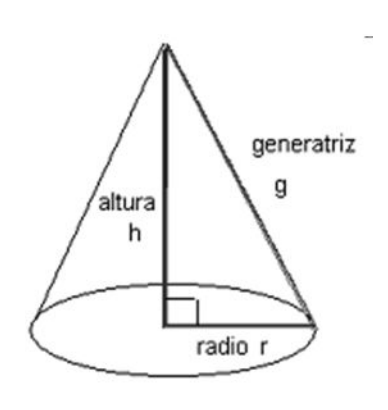
8.8) Hallar el perímetro del triángulo rectángulo si se sabe que el área del sector circular (sombreado) es 63 π cm^2, el ángulo α (alfa) es 20° y la longitud a del segmento indicado es 4/3 del radio de la circunferencia.



R: Perímetro ≅ 97,95 cm

P1.1110

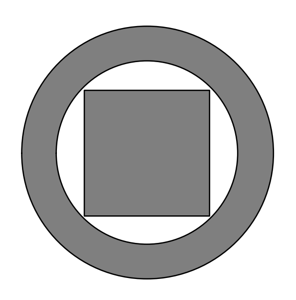
8.9) Calcule primero el área del círculo base del cono recto, luego el volumen del cono, si 46 es la suma del radio de la base y la generatriz, y el área total del cono es 966 π cm^2.



R: Área círculo base = 441 π cm^2 Volumen cono ≅ 6264,35 cm^3

P1.1103

8.10) El área de la corona circular es 71 π cm^2 y la longitud de la circunferencia de menor radio es 10 √2 π cm. Deduzca el radio de c/u de las circunferencias concéntricas, luego calcule el área de la región sombreada si el polígono inscripto es un cuadrado.

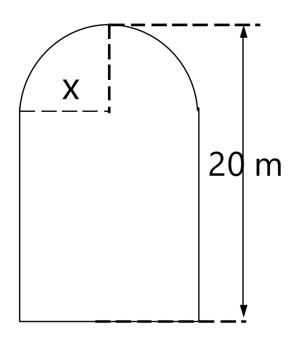


R: Radio mayor = 11 cm , radio menor = 5 √2 cm ,
Área sombreada ≅ 323,05 cm^2

P1.1202

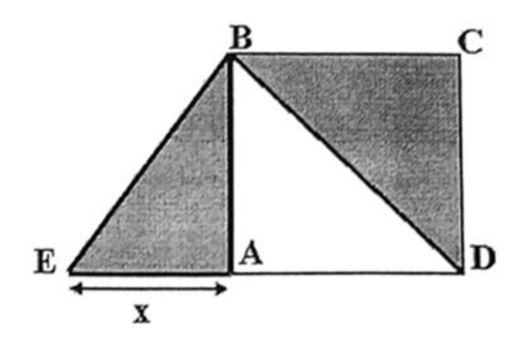
8.11) Un silo para acopio de maíz tiene la forma de un cilindro circular recto con una semiesfera en su parte superior.

Si la altura total del silo es 20 m, y almacena 1377 π m^3 de maíz, hallar el radio del cilindro.



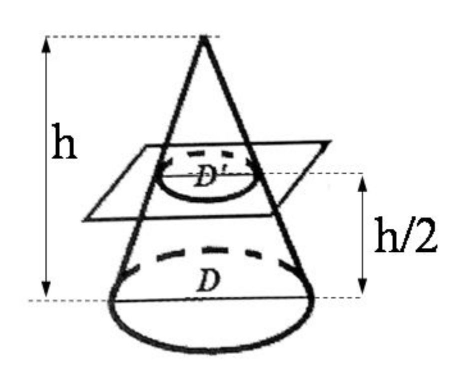
R: Radio = 9 m LPE-87

8.12) Calcule el perímetro del triángulo rectángulo AEB de cateto menor x, de 35 cm de hipotenusa, y área 294 cm^2.
Luego, indique el porcentaje que representa el área de la región sombreada, respecto del área del trapecio (siendo ABCD un cuadrado).



R: Perímetro = 84 cm , Porcentaje ≅ 63,6 % P1.T1.1402

8.13) Un cono circular recto de altura h y diámetro D igual a la altura (D=h), se intersecta con un plano paralelo a su base, a una altura h/2, siendo la curva intersección, una circunferencia de diámetro D'. Determine los diámetros D y D', luego calcule el volumen del tronco de cono de altura h/2, si el área de la base mayor es $A = \left(\frac{12}{7}\right)^{2/3} \pi\, cm^2$



R: $D = 2\sqrt[3]{\frac{12}{7}}\; cm$ $\quad D' = \sqrt[3]{\frac{12}{7}}\; cm$ $\quad Vol_{TC} = \pi\; cm^3$ P1.T1.1302

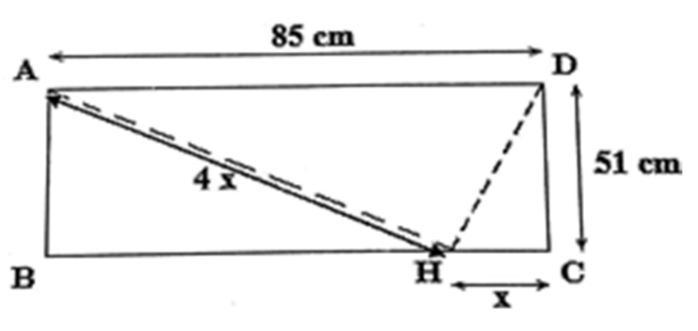
8.14) Determine la cantidad de aluminio que se necesita para construír una lata cilíndrica con base pero sin tapa, cuya capacidad sea de 128 π cm^3, sabiendo que el diámetro de la lata coincide con su altura. Expresar en resultado en forma exacta.

R : 80 π cm^2 LPE-24

8.15) Un alambre cuya longitud es de 40 cm, fue cortado en dos tramos. Uno de los tramos se dobló, haciendo un cuadrado, el otro tramo se usó para hacer un rectángulo, que es tres veces más largo que ancho. La suma del área del cuadrado y del rectángulo resultantes, es 55,75 cm^2. ¿Con qué longitudes quedan los dos tramos del alambre?

R : (28 cm ; 12 cm) ó (44/7 cm ; 236/7 cm) LT-TP3-37

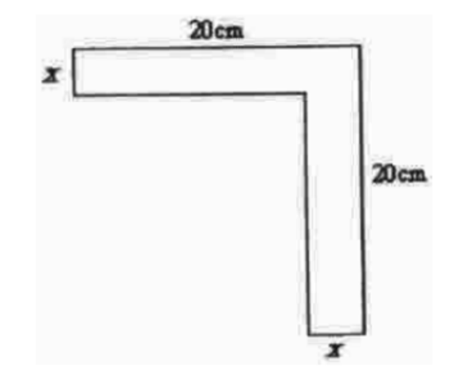
8.16) Determinar la medida x, si el rectángulo ABCD incluye tres triángulos rectángulos, y si la longitud del lado AH es el cuádruple de la longitud x.



R: $x \cong 20{,}55$ cm

Rec.1212

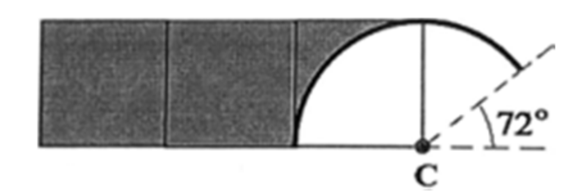
8.17) La figura tiene un área de 111 cm^2. Determinar la longitud x.



R: 3 cm

LT-TP2-37

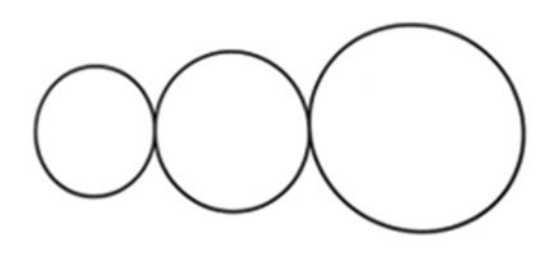
8.18) La imagen muestra tres cuadrados y un arco de circunferencia. Este último tiene centro en el punto C. El área de la región sombreada es (10800 – 900 π) cm^2. Calcular el radio, y luego la longitud del arco de circunferencia representado.



R: r = 60 cm Long. Arco = 36 π cm

P1.T5.1210

8.19) Los diámetros de las tres circunferencias son enteros consecutivos, y el área total de la unión de los tres círculos, es de 434 π cm^2. Hallar la longitud de la circunferencia de mayor diámetro.



R: Longitud = (17 √2 +1) π cm

P1.T1.1202

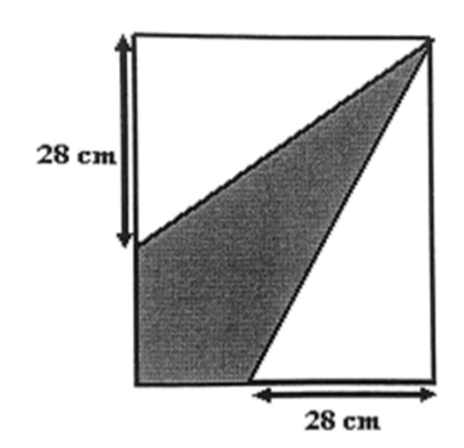
8.20) El área de la región sombreada (contenida dentro de un semicírculo) es $\frac{18\pi - 36}{25}$ cm^2. Determinar el radio del semicírculo.



R: Longitud = 6/5 cm

P1.T3.1202

8.21) Determinar la longitud de un lado del cuadrado representado en la imagen, si el área del romboide sombreado es 893 cm^2. Luego, calcular el perímetro del romboide sombreado.



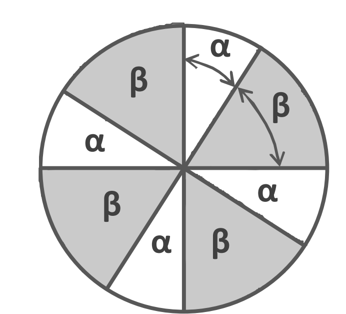
R: lado = 47 cm
perímetro romboide ≅ 147,42 cm

P1.T1.1210

8.22) Determine la medida del lado de un cuadrado, si se sabe que el área del cuadrado que se forma uniendo los puntos medios de los lados del primero, es 18 cm^2.

R : 6 cm LPE-110

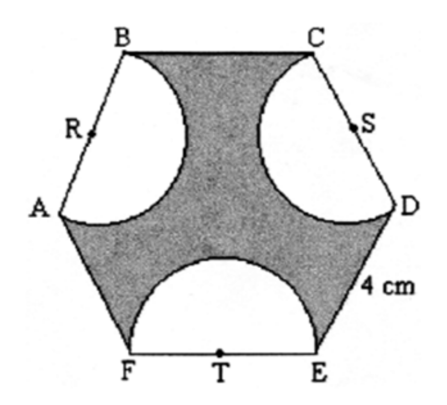
8.23) Calcular el área exacta de la zona sombreada sabiendo que $\alpha = \frac{2}{3}\beta$ y el radio del círculo es 10 cm.



R: 60 π cm^2

LT-TP2-31

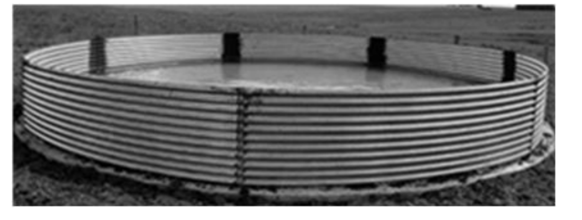
8.24) R, S y T son centros de circunferencias. El polígono ABCDEF es un hexágono regular. Calcular el área exacta de la figura sombreada.



R: $\left(24\sqrt{3} - 6\pi\right) cm^2$

LT-TP2-35

8.25) Calcular la altura de un tanque australiano, sabiendo que es la tercera parte del radio, y que, si se llena hasta los 2/3, caben aún 18,84 m^3



R: $h \cong 1{,}26\ m$ LT-TP2-41

8.26) Hallar el porcentaje de reducción de volumen cuando se hace una muesca cónica de 0,5 cm de radio y 1 cm de altura en cada extremo de una barra de acero cilíndrica de 1 cm de radio y 4 cm de longitud.

R: Reducción del $\frac{25}{6}\ \% \cong 4{,}17\%$ LT-TP2-44

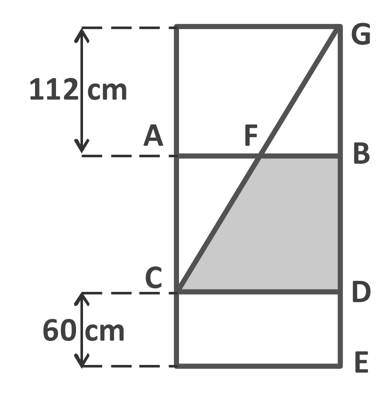
8.27) Un círculo tiene 20 cm de radio. ¿En cuánto deberá disminuírse su radio, para que el área disminuya en 76 π cm^2?

R: Deberá disminuírse en 2 cm LT-TP3-25

8.28) Un rectángulo está inscripto en una circunferencia de 5 cm de radio. Hallar las dimensiones del rectángulo, si su área es 40 cm^2.

R: 4 √5 cm y 2 √5 cm LT-TP3-36

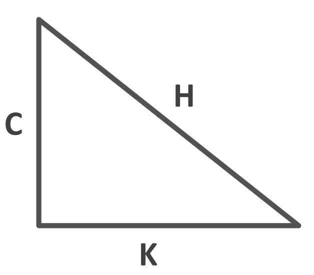
8.29) El lado CG mide 208 cm, tomar nota también de las longitudes indicadas en el dibujo. El área del trapecio sombreado CFBD es 15200/3 cm^2, y ABCD es un cuadrado. Se pide hallar:



a) Perímetro del triángulo no rectángulo CGE
b) Longitud del lado FB

R: $a)\ 560\ cm$ $b)\ 46{,}67\ cm$ P1.T56.1802

8.30) Para un triángulo rectángulo de cuyos lados se conocen las siguientes expresiones:

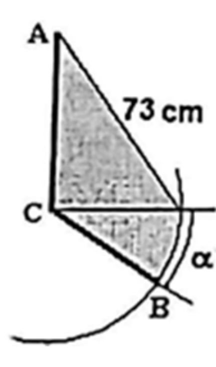


$$C = \sqrt{\frac{280}{9}x - 216} \qquad K = 12 + \sqrt{x} \qquad H = \frac{17}{3}\sqrt{x}$$

a) Hallar el área del triángulo
b) Hallar su perímetro

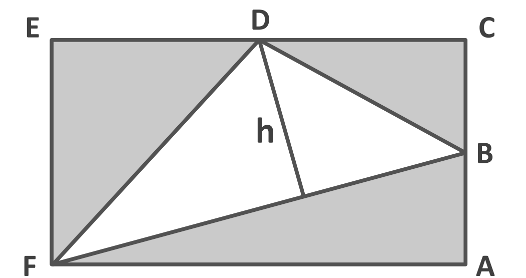
R: $a)\ 60$ $b)\ 40$ P1.T56.1802

8.31) Determinar las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo (no isósceles) de hipotenusa 73 cm y perímetro 176 cm, sabiendo que el área de la región sombreada (triángulo unión sector circular) es 2073,9822 cm^2, la hipotenusa mide lo indicado, y el arco de circunferencia representado tiene centro en C. Luego, calcule la medida del ángulo α (alfa) del ángulo del sector circular.



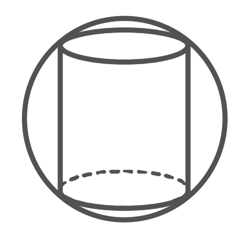
R: $h = 55\ cm$ $r = 48\ cm$ $\alpha = 37°\ 30'$ P1.T1.1811

8.32) Sean B y D puntos medios de cada lado del rectángulo. También se sabe que las medidas de los segmentos son:
$\overline{BC} = 28\ cm\ \ y\ \ \overline{CD} = 48\ cm$
Hallar la altura h del triángulo BDF



R: $h = 40{,}32\ cm$ F.T1.1812

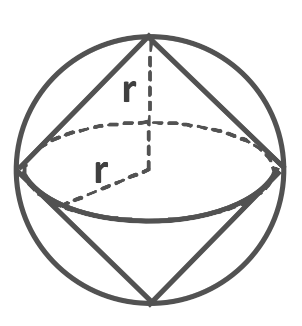
8.33) Un cilindro inscripto en una esfera de 10 cm de radio, tiene 16 cm de altura. Calcular el área total del cilindro.



R: $Área\ total = 264\ \pi\ cm^2$ LPE-117

8.34) Dada una esfera de volumen:

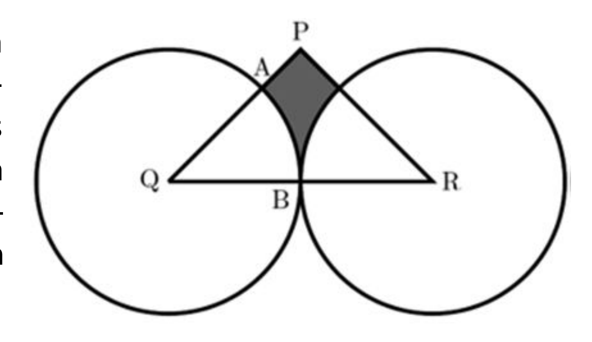
$$V = \frac{4000}{3}\ \pi\ cm^3$$



Y dos conos circulares rectos inscriptos en ella de acuerdo a la figura, determinar la diferencia de volumen entre la esfera y los conos. Luego, hallar la suma de las áreas de las superficies laterales de los conos.

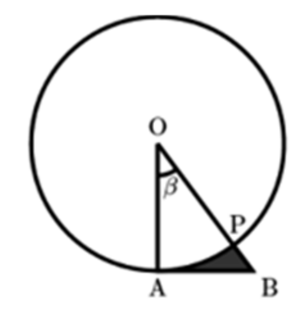
R: $Vol_{DIF} = \dfrac{2000}{3}\ \pi\ cm^3$ $A_{LAT} = 200\ \pi\ \sqrt{2}\ cm^2$ P1.T3.1302

8.35) Las circunferencias con centro en Q y en R tienen igual radio. También, son tangentes en el punto B. El triángulo PQR es isósceles, y es rectángulo en P. El área del sector circular QAB es 50 π cm^2. Determinar el radio y el área de la región sombreada.



R: $r = 20\ cm$ $A_{SOMBREADA} \cong 85{,}84\ cm^2$ P1.T2.20.02 / mod gp

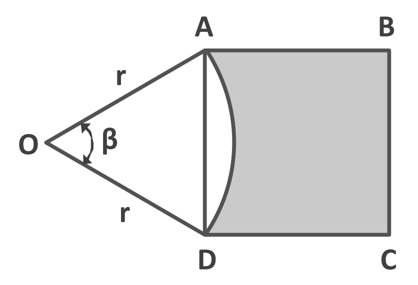
8.36) Hallar el radio y el área de la región sombreada, sabiendo que el área del sector circular es 3 π cm^2, que el ángulo β es de 30° y que el segmento OB mide $\sqrt{85}$ cm



R: $r = 6\ cm$ $A_{SOMBREADA} \cong 11{,}58\ cm^2$ P1.T3.20.02 / mod gp

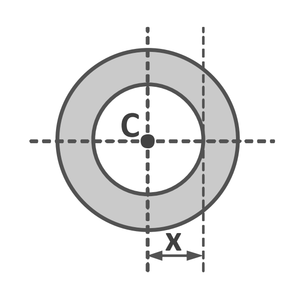
8.37) El cuadrado ABCD de la figura, tiene a su izquierda un triángulo isósceles AOD de ángulo central β = 60°, y un sector circular del mismo ángulo, con radio 6,5 cm.

Hallar el área de la zona sombreada.



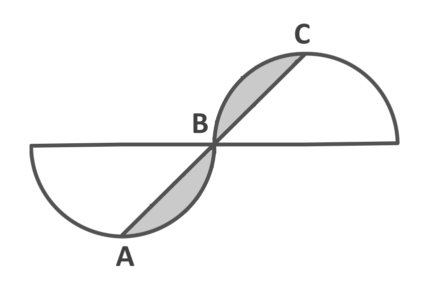
R: $A_{SOMBREADA} \cong 38{,}43\ cm^2$ R2P1.campus.21.03

8.38) Determinar los posibles valores de x (radio menor) que hagan que el área de la corona circular de centro C sea mayor que 2601 π, sabiendo que la longitud de la circunferencia exterior es 170 π.



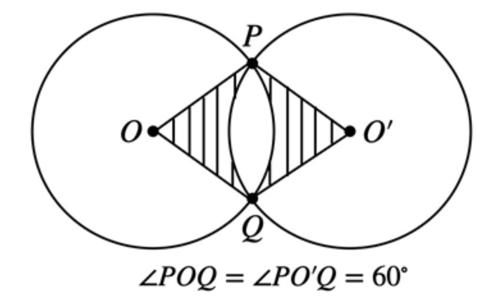
R: $x \in (0\,; 68)$ F.T2.15.07

8.39) Dos semicírculos de radio 4 cm están ubicados sobre la misma línea horizontal, se tocan en sus extremos en el punto B, y tienen una cuerda AB y otra cuerda BC iguales. Hallar el área de la región sombreada.



R: $A_{SOMBREADA} = (8\,\pi - 16)\ cm^2$ P1.campus.22.02 / mod gp

8.40) Las circunferencias de la figura, con centro en O y en O′, son circunferencias de 4 cm de radio. Sabiendo que los ángulos ∠POQ y ∠PO′Q miden ambos 60°, hallar el área de la región sombreada.



R: $A_{SOMBREADA} = \left(16\sqrt{3} - 16/3\,\pi\right) cm^2$ P1.T2.ej5.23.02

9. FUNCIONES PARTE 2

TEMA EXPLICADO EN LOS VIDEOS:

2.1 Funciones (**parte 2a**)



https://youtu.be/Ukb1VWqsyz8

2.1 Funciones (**parte 2b**)



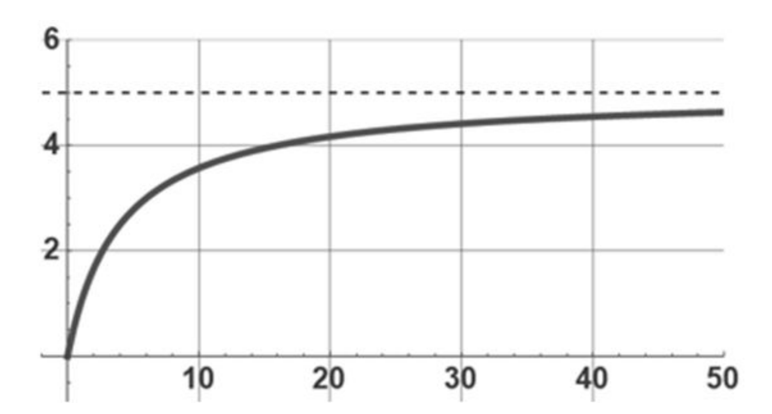
https://youtu.be/yUF-v0yw3gI

Tener sabido: dominio, conjunto imagen, conjunto de ceros, conjunto de positividad, conjunto de negatividad, paridad, crecimiento, vértice, y asíntotas. Saber las gráficas de todas las funciones básicas ya vistas. Tener bien sabidas las **tres leyes** fundamentales **del dominio**: 1) está prohibido dividir por cero, 2) las raíces de índice par, no pueden tener radicando negativo, 3) los argumentos de logaritmos, deben ser positivos, y las bases de logaritmos deben ser positivas y distintas de uno.

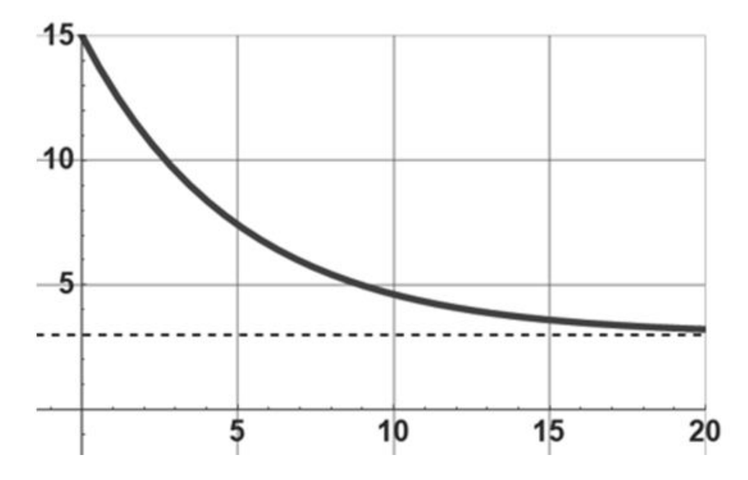
9.1 Asíntotas

La función f tiene **asíntota horizontal**, si para x → ∞ (x tiende a infinito), la función tiende a acercarse a la recta horizontal y = cte. La función (sus imágenes), se aproxima cada vez más a la recta cuando x crece, sin dejar de aproximarse nunca, sin alcanzar la recta nunca, y sin traspasarla nunca. La asíntota horizontal es una recta, no es un número.

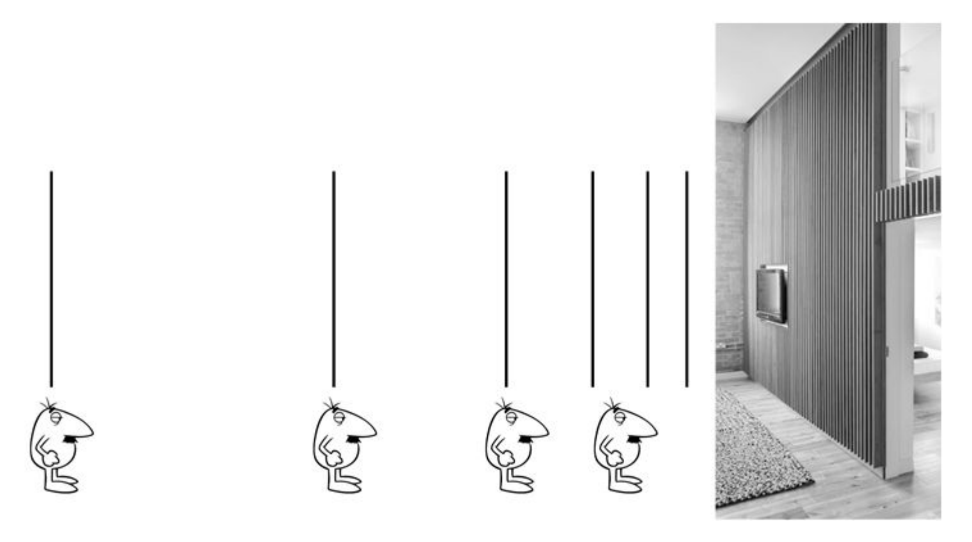
Ej. N°1: la función $f(x) = \dfrac{5x}{x+4}$ tiene un *crecimiento asintótico* hacia la recta AH: y = 5, porque a medida que x crece, en el límite cuando x → ∞ la función tiende a 5:



Ej. N°2: la función $f(x) = 3\,(1 + 4\,e^{-0,2\,x})$, tiene *decrecimiento asintótico* hacia la recta de ecuación AH: y = 3, porque a medida que x crece, en el límite cuando x → ∞ la función tiende a 3. Esta función es una *exponencial decreciente* (y se verá más adelante):



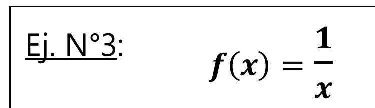
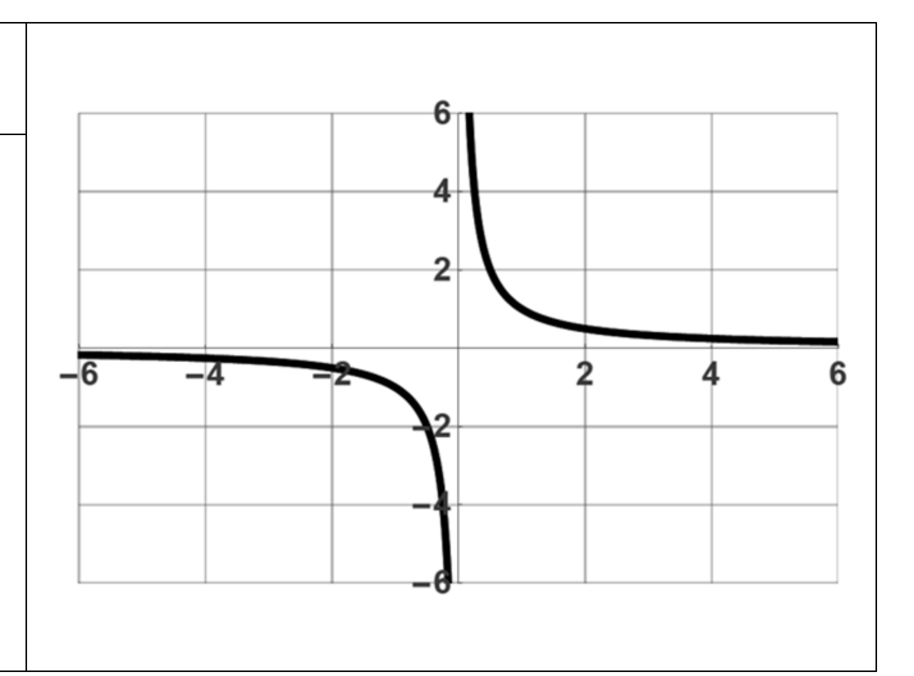
Como analogía, tenemos una **aproximación asintótica** a una pared (ver imagen siguiente), cuando tipito se acerca la mitad de la distancia que le falta, cada intervalo de tiempo, siempre la mitad. Como siempre se aproxima sólo la mitad, nunca llega, tampoco nunca la traspasa, y nunca toca la pared tampoco. Cuando t → ∞ (en el límite cuando t tiende a infinito), se supone que "llegaría" a la pared.



La función f tiene **asíntota vertical**, cuando si x → a (siendo a un valor finito) ocurre que f(x) → ∞. Ocurrirá que x se aproxima al valor x=a, cada vez más, sin dejar nunca de acercarse, sin alcanzar nunca el valor a, y sin traspasarlo nunca, y a medida que eso pasa, la función "tiende" a infinito. La asíntota vertical es una recta vertical x = a.

La siguiente función, es un claro ejemplo de los dos tipos de asíntotas mencionadas, pues ambas, vertical y horizontal, se dan en la misma función.

9.2 Función racional

<table>
<tr><td>Ej. N°3: </td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$D_f = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$
$I_f = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$
Siempre decreciente
$C^0 = \{ \}$
$C^+ = \mathbb{R}^+$
$C^- = \mathbb{R}^-$
AV: es la recta x = 0
AH: es la recta y = 0
Función impar</td></tr>
</table>

9.3 Función homográfica

Es la función racional desplazada (o generalizada) en el plano XY:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

La función homográfica:

1) Es el cociente de dos polinomios de grado 1°.
2) Lleva cuatro coeficientes a, b, c, d que son los que logran los desplazamientos necesarios para generalizar la función racional en XY.
3) Mantiene las dos asíntotas que tiene la racional.
4) Es siempre creciente, o siempre decreciente.

AV: es la recta $x_{AV} = -\dfrac{d}{c}$

AH: es la recta $y_{AH} = \dfrac{a}{c}$

Df = $\mathbb{R} - \{-d/c\}$

If = $\mathbb{R} - \{a/c\}$

$C^0 = \{ -b/a \}$

Ordenada al origen: y = b/d

Ej. N°4: $f(x) = \dfrac{6x+3}{2x-4}$

AV: es la recta $x_{AV} = 2$

$D_f = (-\infty\ ;\ 2) \cup (2\ ;\ +\infty)$

AH: es la recta $y_{AH} = 3$

$I_f = (-\infty\ ;\ 3) \cup (3\ ;\ +\infty)$

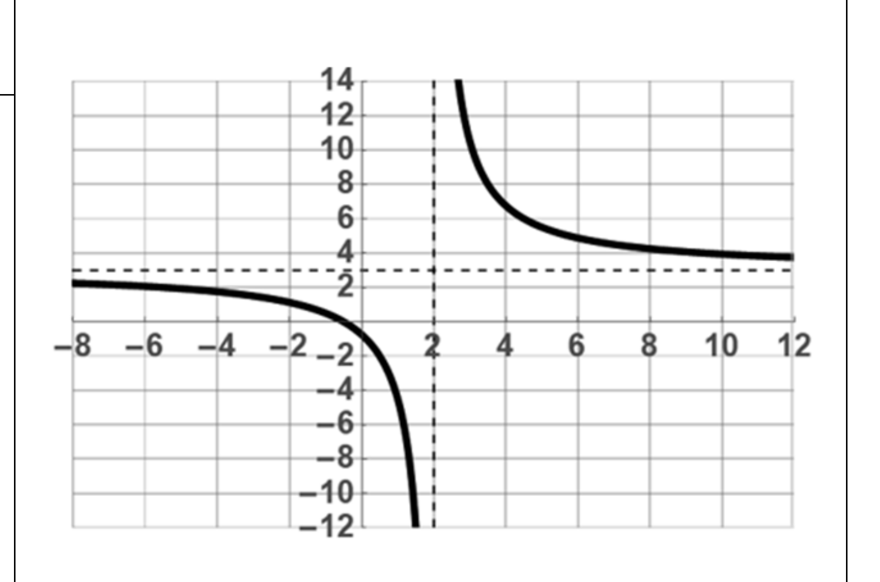
Siempre decreciente

$C^0 = \{ -1/2 \}$

$C^+ = (-\infty\ ;\ -1/2) \cup (2\ ;\ +\infty)$

$C^- = (0\ ;\ 2)$

Ordenada al origen: y = -3/4



Ej. N°5: $f(x) = \dfrac{5x+2}{x+1}$

AV: es la recta $x_{AV} = -1$

$D_f = (-\infty\ ;\ -1) \cup (-1\ ;\ +\infty)$

AH: es la recta $y_{AH} = 5$

$I_f = (-\infty\ ;\ 5) \cup (5\ ;\ +\infty)$

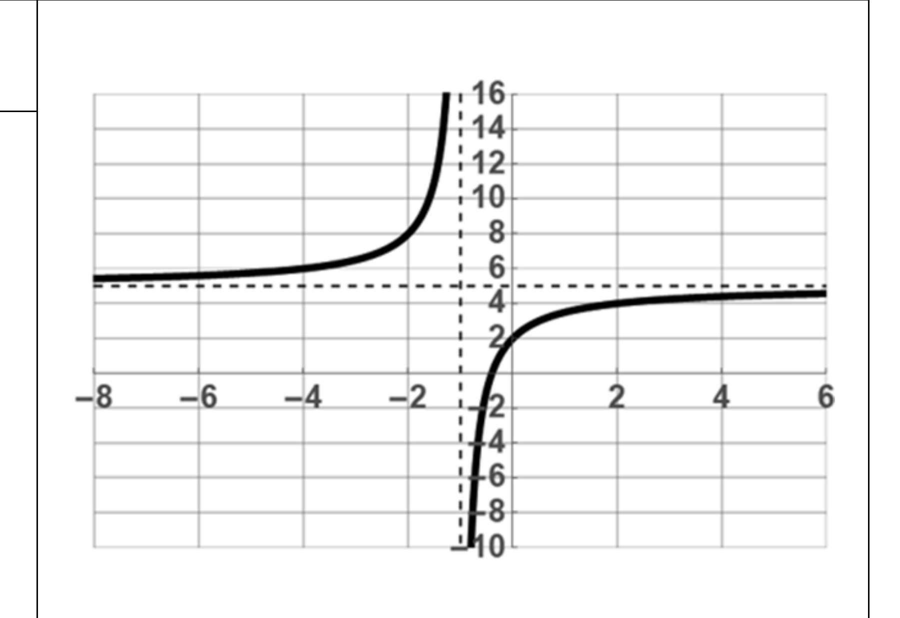
Siempre creciente

$C^0 = \{ -2/5 \}$

$C^+ = (-\infty\ ;\ -1) \cup (-2/5\ ;\ +\infty)$

$C^- = (-1\ ;\ -2/5)$

Ordenada al origen: y = 2



9.4 Problemas con funciones homográficas

9.1) Hallar dominio, conjunto imagen, y ceros de la función $f(x) = \frac{x+1}{3-2x}$

R: $D_f = \mathbb{R} - \{3/2\}$ $\quad I_f = \mathbb{R} - \{-1/2\}$ $\quad C^0 = \{-1\}$ gp

9.2) Hallar dominio, conjunto imagen, y ceros de la función $g(x) = \frac{1-3x}{3x+2}$

R: $D_g = \mathbb{R} - \{-2/3\}$ $\quad I_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\quad C^0 = \{1/3\}$ gp

9.3) Sea $f : \mathbb{R} - \{ 1/4 \} \rightarrow \mathbb{R}\ /\ f(x) = \frac{12\,x + k}{a\,x - 1}$, tal que 3 es cero de esta función homográfica. Hallar el conjunto solución de la inecuación: f (x) > 0

R : a = 4 k = - 36 S = (- ∞ ; ¼) U (3 ; +∞) P1.T1.1410

9.4) Las funciones siguientes tienen la misma AV.

$f : \mathbb{R} - \{ k \} \rightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) = \dfrac{14\,x + 50}{2\,x + 3}$

$g : \mathbb{R} - \{ c \} \rightarrow \mathbb{R} \;/\; g(x) = \dfrac{8\,x + 16}{a\,x + 24}$

Hallar la mínima expresión de la diferencia f (x) – g (x)

Y hallar el conjunto solución de f (x)- g (x) ≤ g (-2)

R : $f(x) - g(x) = \dfrac{13\,x + 48}{2\,x + 3}$ S = $\left[-\dfrac{48}{13} ; -\dfrac{3}{2}\right)$ P1.T1.1402

9.5) Sean las funciones

$f : \mathbb{R} - \{ -1/8 \} \rightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) = \dfrac{24\,x + 8}{8\,x + 1}$

h: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / h (x) = p x + 8

Determine las coordenadas (x ; y) de los puntos donde se intersectan las curvas de f y h, sabiendo que la pendiente de la recta es 15.

R: P_1 (0 ; 8) P_2 (-11/24 ; 9/8) P1.T3.1410

9.6) Dada la función $g\colon \mathrm{D}_g \rightarrow \mathbb{R} \;/\; g(x) = \dfrac{a\,x + c}{k\,x + 180}$ con asíntotas ubicadas en las rectas x = 12; y = -7, siendo 6 el único cero de la función.

a) Determinar el conjunto dominio D_h y el conjunto imagen I_h de la función:

$$h\colon \mathrm{D}_h \rightarrow \mathbb{R} \;/\; h(x) = \frac{c\,x + 1}{63\,x + 21\,k}$$

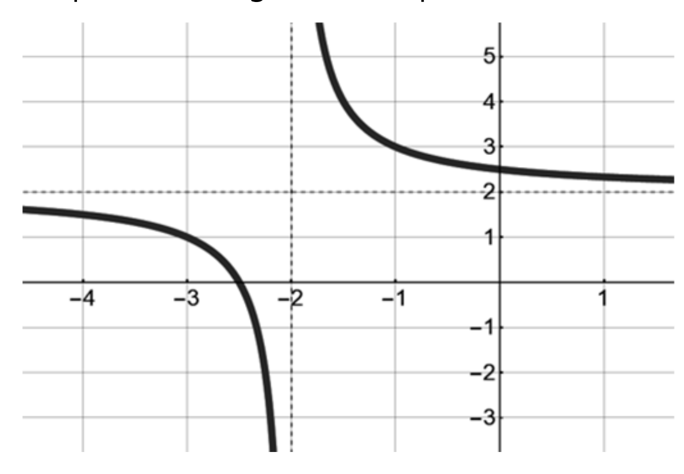
b) Escribir en notación de intervalo, el conjunto:

$$\mathrm{A} = \{\, x \;/\; x \in D_h \wedge \frac{h(x)}{c\,x + 1} \leq 0 \,\}$$

R: $a)$ $\mathrm{D}_h = \mathbb{R} - \{5\}$ $\mathrm{I}_h = \mathbb{R} - \{-10\}$ $b)$ $A = (-\infty\,; 5)$ P1.T56.1802

9.7) Sea la función $h\colon \mathbb{R} - \{ -c \} \rightarrow \mathbb{R} \;/\; h(x) = \dfrac{c\,x + 5}{x + c}$

con c constante, tal que su curva gráfica se representa:



Determinar el conjunto solución de la inecuación:

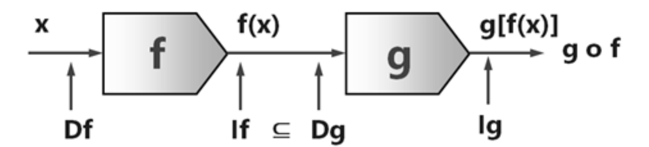
$$h(x) + \frac{7}{x + c} \leq 1$$

R: $S = [-10\,;-2)$ P1.T1.1811

9.5 Composición de funciones

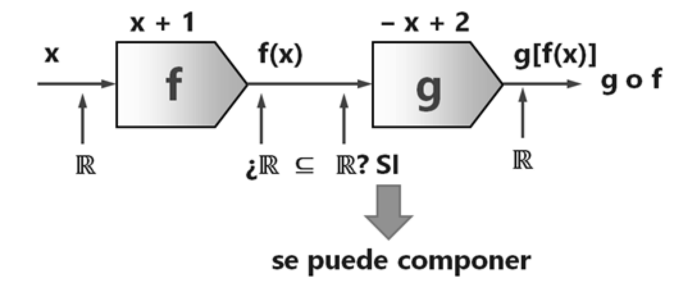
Las imágenes producidas por una función f, son usadas como entrada a otra función g.

SE PUEDE componer, cuando el conjunto de las imágenes de la primera función, es subconjunto del dominio de la segunda función (en este ejemplo If ⊆ Dg):



Ej. N°6: componer la función g o f, donde las funciones son g(x) = – x + 2; f(x) = x + 1.

Debe hacerse primero el chequeo: ¿If ⊆ Dg? Acá es muy visible que If = Dg = ℝ por lo tanto dado que ℝ⊆ℝ (todo conjunto es subconjunto de sí mismo) la respuesta es "sí, se puede componer" todos los elementos del If pueden "entrar" a la función siguiente:



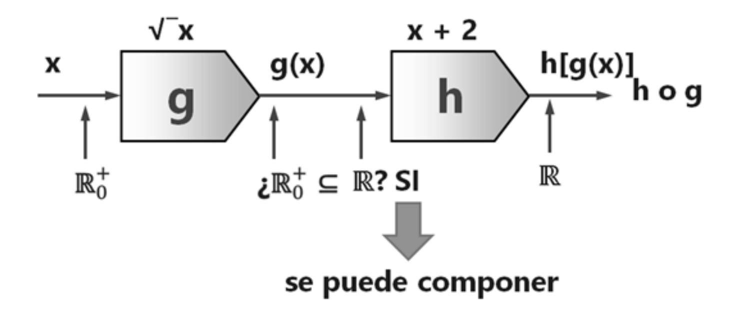
Lo que sigue es armar la función compuesta, esto es, la fórmula y como mínimo su dominio (recordemos que la fórmula no es la función). Cuando se puede componer, el dominio de la función compuesta es directamente el dominio de la primera función, en este caso, Df = ℝ. La fórmula se compone haciendo:

(g o f) (x) = g [f(x)] = – (x+1) + 2 = – x – 1 + 2 = – x + 1

Por lo tanto la función compuesta es:

g o f : ℝ → B / (g o f) (x) = – x + 1

Ej. N°7: componer la función h(x) = x + 2 con la función g(x) =√‾x.



Lo que sigue es armar la función compuesta, esto es, la fórmula y como mínimo su dominio (la fórmula no es la función). Cuando se puede componer, el dominio de la función compuesta es directamente el dominio de la primera función, que en este caso es Dg = $\mathbb{R}_0^+$. La fórmula se compone haciendo:

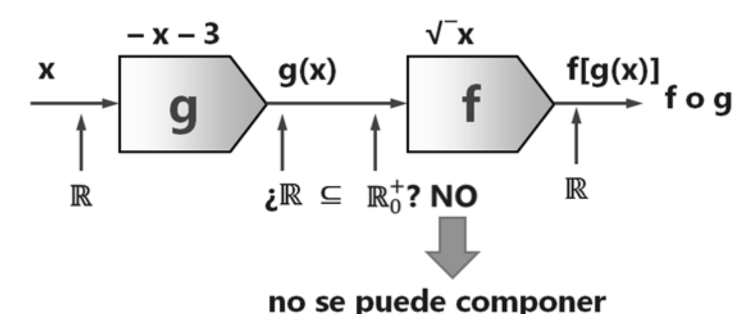
(h o g) (x) = h [g(x)] = $\sqrt{x} + 2$

Por lo tanto la función compuesta es:

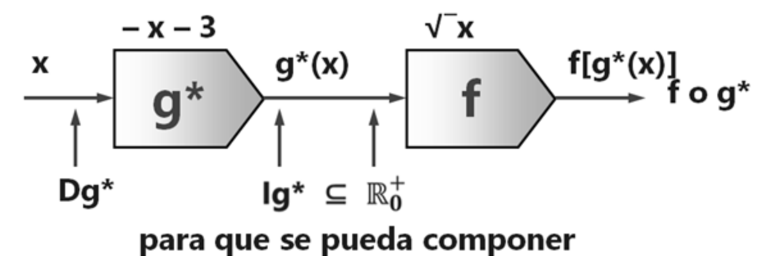
h o g : $\mathbb{R}_0^+$ → B / (h o g) (x) = $\sqrt{x} + 2$

<u>NO SE PUEDE</u> componer, cuando no se verifica la condición dicha; en ese caso hay que reformar la primera función, restringiendo su conjunto imagen a sólo las imágenes que puedan ser subconjunto del dominio de la siguiente.

<u>Ej. N°8</u>: componer f o g usando las funciones g(x) = $-x-3$; f(x) = $\sqrt{x}$.



Reduciendo el conjunto imagen de la primera función, sólo a las imágenes que puedan “entrar” a la función siguiente, lo que se suele llamar “restringir”:



En realidad estamos creando una nueva función que suele escribirse con un asterisco (en este ejemplo g*), que tendrá la misma fórmula. Esa porción del Ig “que puede entrar en la siguiente función” es fácilmente obtenible:

Ig* = Ig ∩ Df = $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_0^+$

Necesitamos ahora ir “hacia atrás” para determinar qué dominio tendrá la nueva función g*, capaz de producir el conjunto imagen hallado.

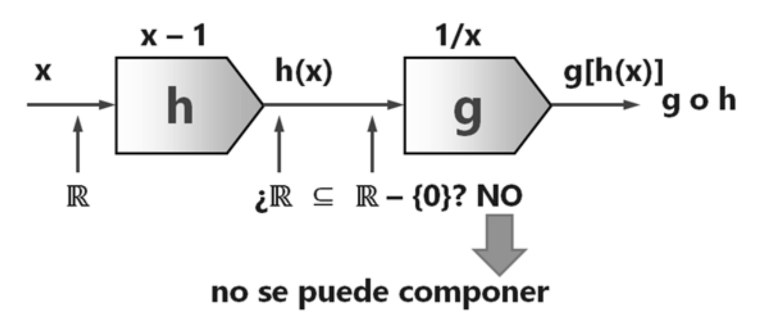
Dg* = D (f o g*): $-x-3 \geq 0$ (queremos que la fórmula produzca valores ≥ 0)

$x \leq -3$

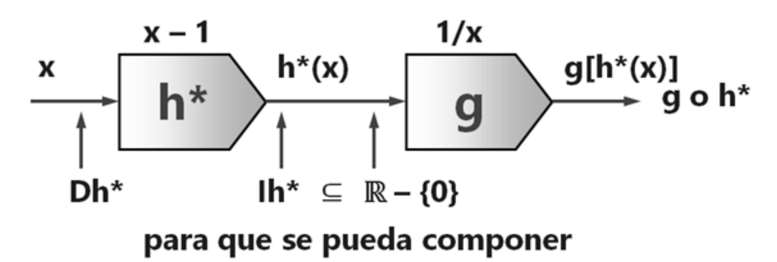
Este es el dominio de la función compuesta “posible”, que ya podemos escribir:

f o g* : $(-\infty; -3]$ → B / (f o g*) (x) = $\sqrt{-x-3}$

Ej. N°9: componer g o h usando las funciones g(x) = x – 1 ; h(x) = 1/x .



Reduciendo el conjunto imagen de la primera función, sólo a las imágenes que puedan "entrar" a la función siguiente, lo que se suele llamar "restringir":



En realidad estamos creando una nueva función que suele escribirse con un asterisco (en este ejemplo h*), que tendrá la misma fórmula. Esa porción del Ih "que puede entrar en la siguiente función" es fácilmente obtenible:

Ih* = Ih ∩ Dg = ℝ ∩ ℝ–{0} = ℝ – {0}

Necesitamos ahora ir "hacia atrás" para determinar qué dominio tendrá la nueva función h*, capaz de producir el conjunto imagen hallado.

Dh* = D (g o h*): x – 1 ≠ 0 (queremos que la fórmula produzca valores ≠ 0)

x ≠ 1

Este es el dominio de la función compuesta "posible", que ya podemos escribir:

g o h* : ℝ – {1} **→ B / (g o h*) (x) =** $\frac{1}{x-1}$

¿Podría darse un caso donde sea imposible componer, aún restringiendo? Veamos un ejemplo:

Ej. N°10: componer g o f usando las funciones f(x) = |x| ; g(x) = $\sqrt{-x-1}$.

El chequeo necesario es: ¿ If ⊆ Dg ?

¿ $\mathbb{R}^+$ ⊆ $(-\infty; -\mathbf{1}]$?

A lo que por supuesto, la respuesta es NO, y en una segunda etapa intentamos encontrar el conjunto intersección, que supuestamente permitiría componer:

If* = $\mathbb{R}^+ \cap (-\infty; -\mathbf{1}]$ **= ∅**

O sea no es posible componer ni siquiera restringiendo If.

Hallar las siguientes **funciones compuestas**. En caso de no ser posible, restringir la primera función. Expresar adecuadamente la función compuesta, con su dominio.

9.8) Para las funciones: $f: Df \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x - 1$ $\quad h: Dh \to \mathbb{R} \,/\, h(x) = x^2$

Hallar: a) $f \circ h$ b) $h \circ f$

R: a) $f \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, (f \circ h)(x) = x^2 - 1$ gp

b) $h \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, (h \circ f)(x) = (x - 1)^2$

9.9) Para las funciones: $f: Df \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \sqrt{x}$ $\quad g: Dg \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = \sqrt{1 - x}$

Hallar: a) $f \circ g$ b) $g \circ f$

R: a) $f \circ g : (-\infty\,; 1] \to \mathbb{R} \,/\, (f \circ g)(x) = \sqrt[4]{1 - x}$ LT-cap5-teoría

b) $g \circ f^* : [\,0\,; 1\,] \to \mathbb{R} \,/\, (g \circ f^*)(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$

9.10) Sean las funciones: $g : A \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = \sqrt{ax + b}$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^4 + x^2$

Y la función compuesta: $f \circ g : A \to \quad / \,(f \circ g)(x) = 49\, x^2 + 301\, x + c$

Hallar las constantes positivas a, b, c

R: a = 7 b = 21 c = 462 P2.T6.1411

9.11) Sean las funciones:

$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}/g(x) = 9 + \sqrt{x + 8}$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = -5x^2 + 90\, x + 4$

Hallar el conjunto solución de la inecuación: $(f \circ g)(x) \leq 254$

R: $S = [\,23\,; +\infty)$ F.T2.1803

9.12) Sean las funciones:

$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}/f(x) = \sqrt{x} - 6$ $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = x^2 - 49$

Determinar la función compuesta: $(g \circ f)(x)$ y los ceros de la misma

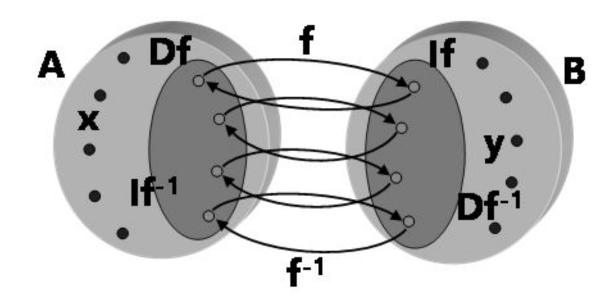
R: $g \circ f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \,/\, (g \circ f)(x) = \left(\sqrt{x} - 6\right)^2 - 49$ $\quad C^0 = \{\, 169 \,\}$ P2.T37.1603

9.6 Función inversa

Suena familiar decir que la división es la *operación inversa* de la multiplicación, la resta es la *operación inversa* de la suma, y la raíz cuadrada es la *operación inversa* si antes hubiésemos elevamos al cuadrado. Usamos *operaciones inversas* para revertir lo que hizo la otra operación antes. *Función inversa* extiende ese concepto, encuadrándolo en funciones, lo que es un enfoque más profundo, porque la función inversa de f (que escribiremos f^{-1} aunque esta simbología no tiene nada que ve con un exponente) tiene que ser capaz de lograr lo siguiente:

1) Recuperar, partiendo desde el conjunto de las imágenes de f, a todos y cada uno de los elementos del dominio de f. Esto invierte dominio y conjunto imagen.

2) Ser función también, y por lo tanto f^{-1} debe tener también las características propias de toda función, existencia y unicidad. Esto causará dos condiciones (y definiciones) que deberá cumplir la función f para poder tener función inversa.



Esas definiciones son inyectividad, sobreyectividad, y biyectividad.

9.6.1 Inyectividad

Una función es inyectiva cuando elementos distintos del dominio, se transforman en imágenes distintas en el codominio, es decir, en símbolos:

$f: A \rightarrow B$ es inyectiva $\Leftrightarrow \forall x_1; x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Observaciones:

- La *inyectividad* de f, es la característica que asegura que f^{-1} tenga *unicidad*.
- Podría decirse que todo el dominio es "inyectado" elemento por elemento en el codominio a través de la función sin "comprimirse".
- Por lo dicho, cada punto del dominio "persiste" en el codominio, sólo que transformado a través de la función.
- Chequeo gráfico de inyectividad: si la función es inyectiva, toda recta horizontal trazada por sus imágenes cortará a su gráfica una y sólo una vez.

Ej. N°11: analizar la inyectividad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x)= 2x - 1$.
Partiendo de $x_1 \neq x_2$ armamos la condición que queremos verificar:

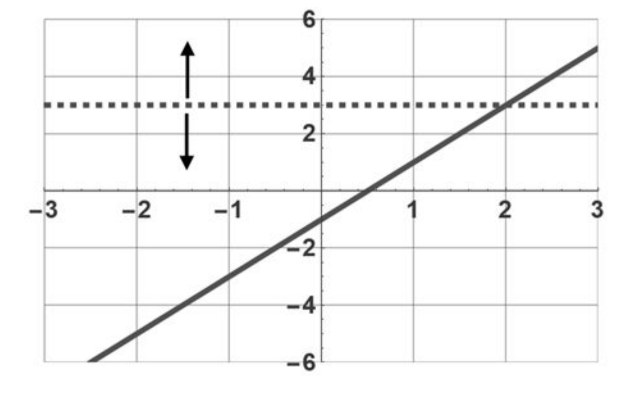
$x_1 \neq x_2$

$2x_1 \neq 2x_2$. 2 m.a.m.

$2x_1 - 1 \neq 2x_2 - 1$ – 1 m.a.m.

$f(x_1) \neq f(x_2)$ Lo que demuestra que *f es inyectiva*

Chequeo gráfico:
corta en un solo punto.



Ej. N°12: analizar la inyectividad de la función f: ℝ → ℝ / f(x)= $x^2 - 1$.
Partiendo de $x_1 \neq x_2$ armamos la condición que queremos verificar:

$x_1 \neq x_2$

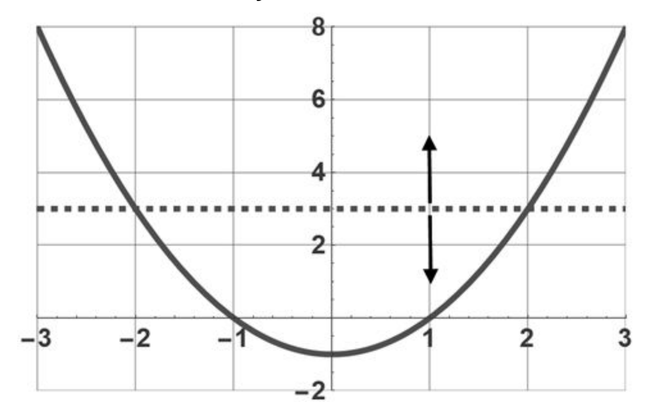
$(x_1)^2 \neq (x_2)^2$ al cuadrado m.a.m.

$(x_1)^2 - 1 \neq (x_2)^2 - 1$ – 1 m.a.m.

Elevar al cuadrado permite que elementos distintos del dominio puedan tener la misma imagen (f es par), es decir si $x_2 = -x_1$ va a ocurrir:

$(x_1)^2 - 1 \neq (x_1)^2 - 1$ por lo tanto *f no es inyectiva*

Chequeo gráfico: corta en dos puntos.



9.6.2 Sobreyectividad

Una función es sobreyectiva[6] cuando todos los elementos del codominio B son imagen de al menos un elemento del dominio, es otras palabras el conjunto imagen coincide con el codominio, es decir, en símbolos:

f: A → B es sobreyectiva ⇔ ∀y ∈ B, ∃x ∈ A / (x;y) ∈ f

Observaciones:

- La *sobreyectividad* de f, es la característica que asegura que f^{-1} tenga *existencia*.
- Podría decirse que para que una función sea sobreyectiva, debe ocurrir una condición algo extrema: que a través de la función, todo el codominio sean imágenes.
- Realmente son muy pocas las funciones que cumplen con la sobreyectividad (recordando que **para nosotros el codominio será siempre el conjunto ℝ** salvo que se indique lo contrario), ellas son las rectas con $m \neq 0$, las funciones impares "puras" (ej. x^3), la función logaritmo (que veremos más adelante), y algunas funciones trigonométricas (ej. tangente, que también veremos más adelante).
- Sin embargo, tanto el conjunto dominio con codominio lo definimos nosotros, esto permite "sobreyectivizar" funciones que no son sobreyectivas de origen, es la técnica ya vista para funciones compuestas, denominada "restringir", lo que causa que, en el fondo, no sea tan restrictiva esta condición.

Ej. N°13: analizar la sobreyectividad de la función f: ℝ → ℝ / f(x)= 2x − 1.

[6] Algunos textos la llaman *"suryectiva"* lo cual probablemente proviene del francés "suryectif".

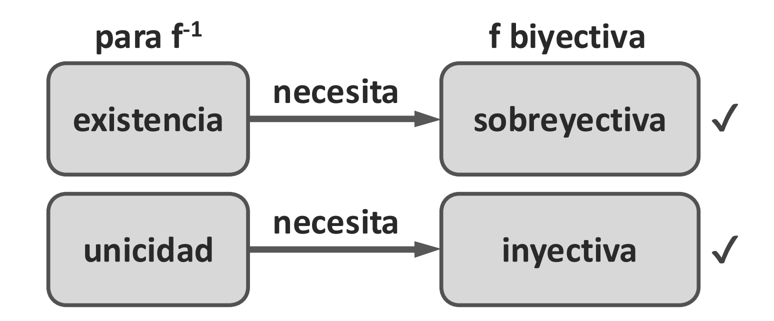
De la misma ya sabemos que entrando con todo el conjunto de los reales, saldrán imágenes que abarcarán a todos lo reales, por lo tanto If = ℝ o sea f es sobreyectiva.

Ej. N°14: analizar la sobreyectividad de la función f: ℝ → ℝ / $f(x)= x^2 - 1$.

Sabemos que la función cuadrática f tendrá If = [−1; +∞), es decir, no es sobreyectiva. Pero como dijimos, al codominio lo podemos tomar como nos conviene, lo que en este caso será igualarlo con el conjunto imagen, y eso automáticamente hará que la nueva función f* : ℝ → [−1; +∞) / $f^*(x)= x^2 - 1$ sea sobreyectiva.

9.6.3 Biyectividad

Una función es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente. Esta es la condición que garantiza que una función tenga función inversa.



Ej. N°15: obtener, si existe, la función inversa de f: ℝ → ℝ / $f(x)= 2x - 1$.

En los Ej. N°11/13 analizamos inyectividad y sobreyectividad de f (en ambos casos con respuesta afirmativa), por lo tanto concluímos que f es biyectiva y entonces admite función inversa, sólo invirtiendo dominio, conjunto imagen y fórmula. Sólo resta hallarla:

f :	$y = 2x - 1$	
f^{-1} :	invertir variable independiente con dependiente	$x = 2y - 1$
	despejar y	$x + 1 = 2y$
		$y = 1/2\ x + 1/2$

Por lo tanto la función inversa es:

f^{-1} : ℝ → ℝ / $f^{-1}(x) = 1/2\ x + ½$

La función inversa de una función lineal, es otra función lineal.

Ej. N°16: obtener, si existe, la función inversa de g: ℝ → ℝ / $g(x)= x^3$.

Partiendo de $x_1 \neq x_2$ armamos la condición que queremos verificar:

$x_1 \neq x_2$

$(x_1)^3 \neq (x_2)^3$ al cubo m.a.m.

Al ser g impar, elementos distintos del dominio no pueden tener la misma imagen, por lo tanto *g es inyectiva.*

También es sobreyectiva puesto que Ig= ℝ. Por lo tanto, g es biyectiva y admite función

inversa, sólo invirtiendo dominio, conjunto imagen y fórmula.

g : $y = x^3$

g^{-1} : invertir variable independiente con dependiente $x = y^3$

despejar y $y = \sqrt[3]{x}$

Por lo tanto la función inversa es:

$g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

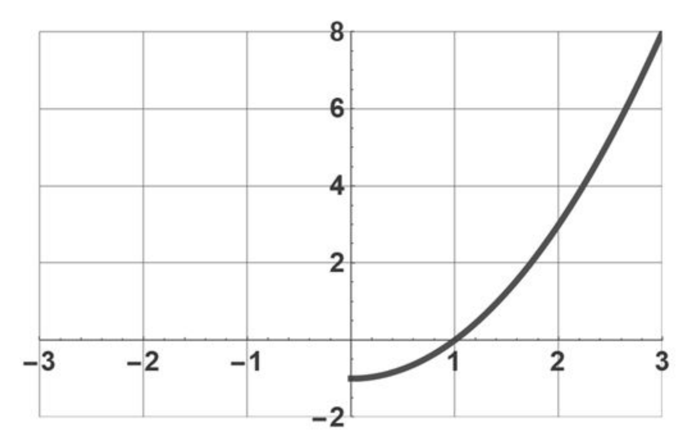
La función inversa de la potenciación, es la radicación.

Ej. N°17: obtener, si existe, la función inversa de f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x)= x^2-1$.

En los Ej. N°12/14 analizamos inyectividad y sobreyectividad de f (en ambos casos con respuesta negativa), por lo tanto concluímos que f no es biyectiva y entonces "en principio" no admite función inversa, pero como sabemos, la sobreyectividad es "manejable" mediante la restricción del codominio al conjunto imagen (hecho en el Ej.N°14):

$f^* : \mathbb{R} \rightarrow [-1; +\infty) \,/\, f^*(x)= x^2 - 1$ es sobreyectiva

¿Cómo solucionamos la no inyectividad? El truco será tomar un *tramo inyectivo (y biyectivo)* lo más grande posible:



El tramo biyectivo permite función inversa y la nueva función es:

$f^* : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [-1; +\infty) \,/\, f^*(x)= x^2 - 1$ es biyectiva

Sólo falta invertir el dominio, el codominio, y la fórmula:

$f^{-1} : [-1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \,/\, f^{-1}(x)= \sqrt{x+1}$

Ej. N°18: hallar, si existe, la función inversa de la función homográfica $f(x) = \dfrac{1+2x}{x-3}$

Es visible que las funciones homográficas son inyectivas, pero en principio no son sobreyectivas pues siempre el conjunto imagen excluye un valor, la asíntota horizontal y=a/c. Para que admita función inversa basta con restringir el codominio al conjunto de las imágenes, que en este caso es: $B = If = \mathbb{R} - \{2\}$.

Hallando la fórmula:

f : $y = \frac{1+2x}{x-3}$

f^{-1} : invertir variable independiente con dependiente: $x = \frac{1+2y}{y-3}$

despejar y: $x\,(y-3) = 1 + 2y$

$xy - 3x = 1 + 2y$

$xy - 2y = 1 + 3x$

$y\,(x-2) = 1 + 3x$

$y = \frac{3x+1}{x-2}$

Por lo tanto la función inversa es:

$f^{-1} : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\} \,/\, f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

La función inversa de una función homográfica, es otra función homográfica.

9.7 Función exponencial

Hay dos maneras de elevar una base a una potencia ($base^{potencia}$) . Hasta ahora hemos visto la potenciación, la exponenciación es una forma alternativa de hacer lo mismo.

Potenciación → base variable / exponente constante (f. inversa: radicación)

Exponenciación → base constante / exponente variable (f. inversa: logaritmación)

$f(x) = a^x$

con $a > 0 \wedge a \neq 1$


<u>Ej. N°19</u>: **f(x) = e^x**

$D_f = \mathbb{R}$

$I_f = \mathbb{R}^+$

sin paridad

AH (por izquierda): y = 0

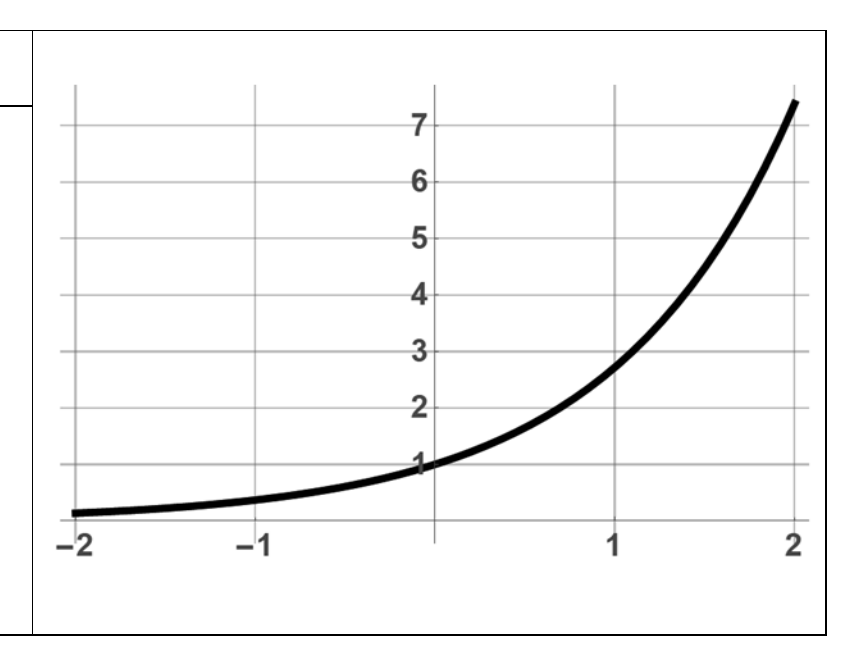
Ordenada al origen en y = 1

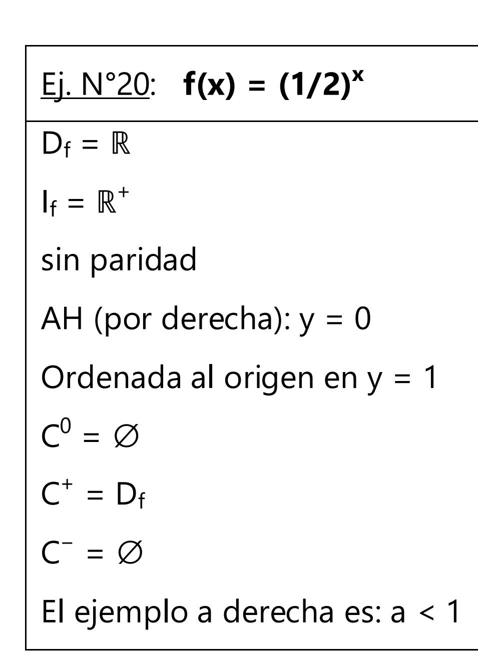
$C^0 = \varnothing$

$C^+ = D_f$

$C^- = \varnothing$

El ejemplo a derecha es: a > 1





Ej. N°20: **f(x) = (1/2)^x**

$D_f = \mathbb{R}$

$I_f = \mathbb{R}^+$

sin paridad

AH (por derecha): y = 0

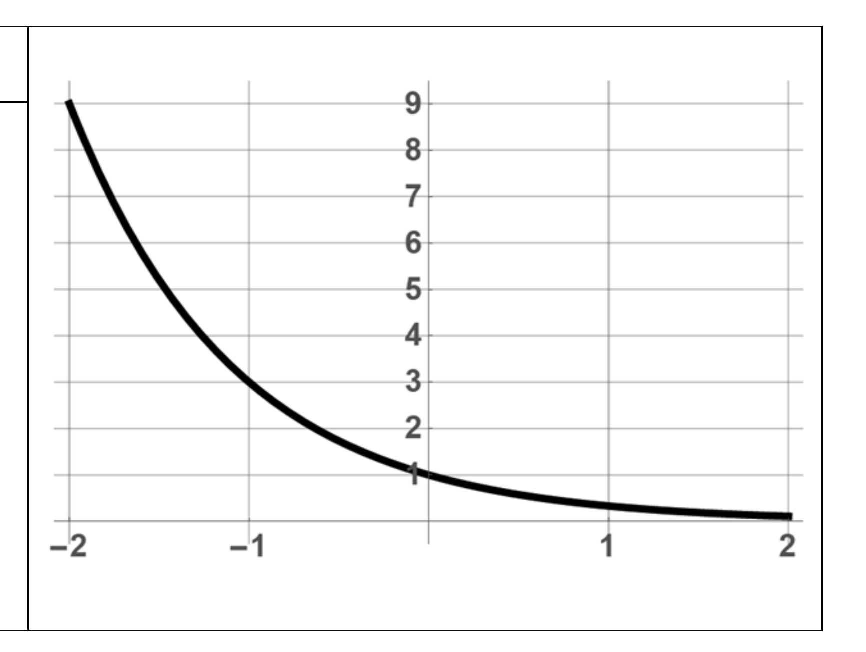
Ordenada al origen en y = 1

$C^0 = \varnothing$

$C^+ = D_f$

$C^- = \varnothing$

El ejemplo a derecha es: a < 1



9.8 Función logaritmo

El logaritmo *obtiene un exponente*, veamos un ejemplo para ilustrar la necesidad.

Ej. N°21: ¿A qué exponente hay que elevar el número 5, para obtener el 2637? Escrito en ecuación, sería: $5^x = 2637$ es decir, tenemos *la incógnita en el exponente*. Esto lo resuelve el logaritmo en base 5 del número 2637, que se escribe:

$\log_5 2637 = 4{,}8945$

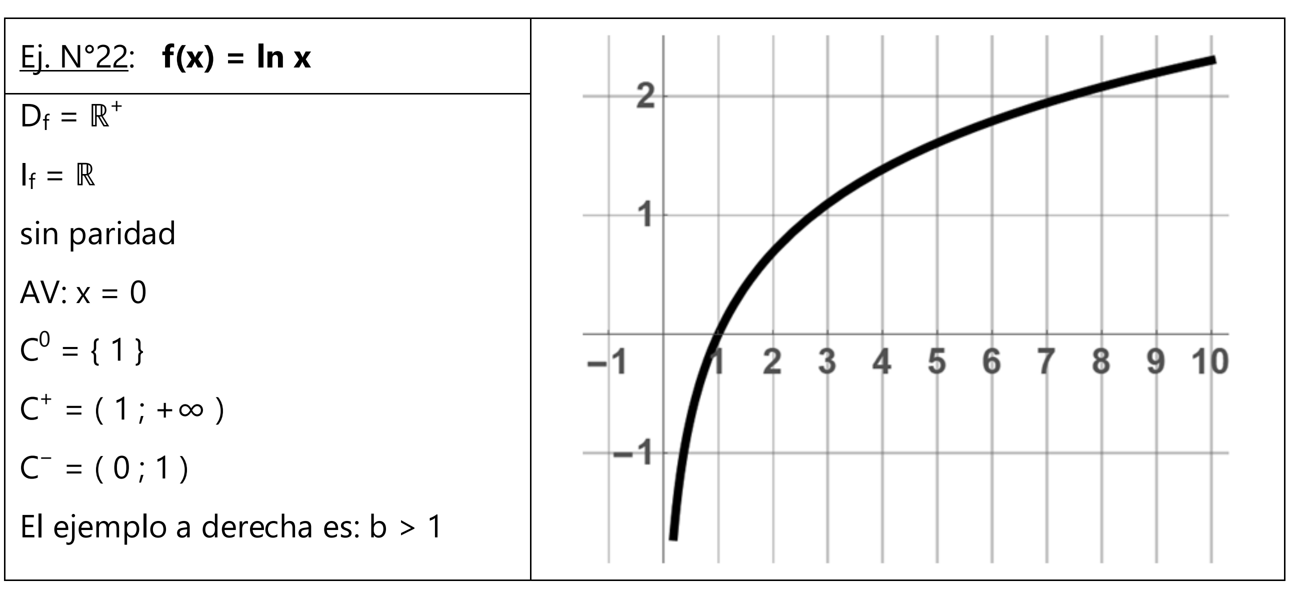
Definición: $\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x$

Se lee: “El logaritmo en base b de x es y, sí y sólo si, b elevado a la y es x”

La base de un logaritmo debe ser: $b > 0 \wedge b \neq 1$

$f(x) = \log_b x$ se lee: logaritmo en base b de x

Se suelen usar dos bases:	$\log_{10}(x) = \log x$ nombre: “logaritmo decimal”	$\log_e(x) = \ln x$ nombre: “logaritmo natural”



Ej. N°22: **f(x) = ln x**

$D_f = \mathbb{R}^+$

$I_f = \mathbb{R}$

sin paridad

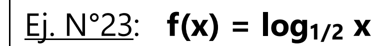
AV: x = 0

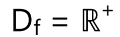
$C^0 = \{ 1 \}$

$C^+ = (1 ; +\infty)$

$C^- = (0 ; 1)$

El ejemplo a derecha es: b > 1


Ej. N°23: **f(x) = log$_{1/2}$ x**


$D_f = \mathbb{R}^+$

$I_f = \mathbb{R}$

sin paridad

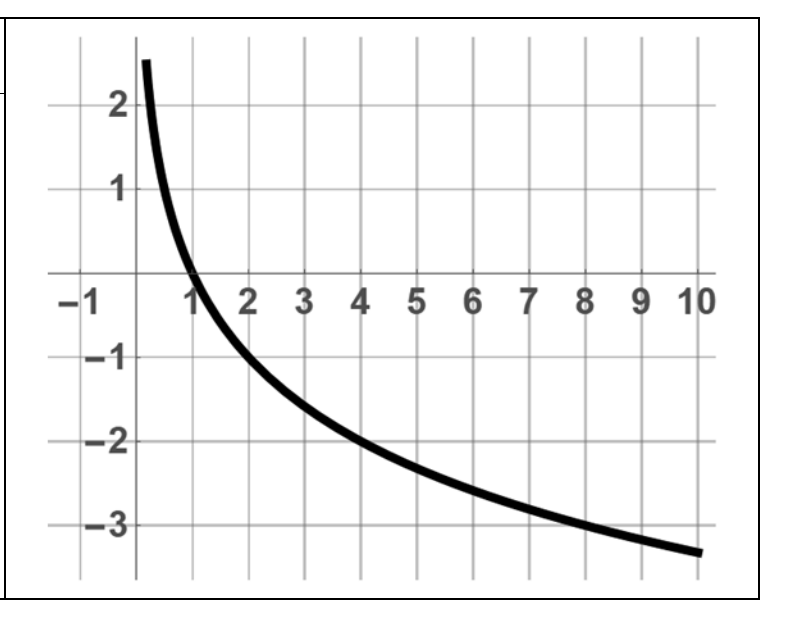
AV: x = 0

$C^0 = \{ 1 \}$

$C^+ = (0 ; 1)$

$C^- = (1 ; +\infty)$

El ejemplo a derecha es: b < 1



Propiedades del logaritmo

1) Logaritmo de un producto: $\log_b(x\,y)$

Demostración:

$\log_b x = c \iff x = b^c$ Por definición de logaritmo

$\log_b y = d \iff y = b^d$ Por definición de logaritmo

Por lo tanto: $\log_b(x\,y) = \log_b(b^c\,b^d) = \log_b(b^{c+d}) = c + d$

$$\boldsymbol{\log_b(x\,y) = \log_b x + \log_b y}$$

Ej. N°24: $\log_3(9\ .\ 81) = \log_3 9 + \log_3 81 = 2 + 4 = 6$

$\ln(42\ .\ 7) = \ln 42 + \ln 7 \cong 3{,}738 + 1{,}946 \cong 5{,}684$

2) Logaritmo de un cociente: $\log_b\left(\frac{x}{y}\right)$

Demostración:

$\log_b x = c \iff x = b^c$ Por definición de logaritmo

$\log_b y = d \iff y = b^d$ Por definición de logaritmo

Por lo tanto: $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b\left(\frac{b^c}{b^d}\right) = \log_b(b^{c-d}) = c - d$

$$\boldsymbol{\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y}$$

Ej. N°25: $\log_5\left(\frac{625}{125}\right) = \log_5 625 - \log_5 125 = 4 - 3 = 1$

$\log\left(\frac{241}{55}\right) = \log 241 - \log 55 \cong 2{,}382 - 1{,}740 \cong 0{,}642$

3) Logaritmo de una potencia: $\log_b(x^y)$

Demostración:

$\log_b x = c \quad \Leftrightarrow \quad x = b^c$ Por definición de logaritmo

Por lo tanto: $\log_b(x^y) = \log_b(b^c)^y = \log_b(b^{c\,y}) = c\;y$

$\mathbf{\log_b(x^y) = y\;\log_b x}$

En la jerga se dice "baja el exponente"

Ej. N°26: $\log_2(3^7) = 7\log_2 3 \cong 7\;.\;1{,}585 \cong 11{,}095$

$\log(5^4) = 4\log 5 \cong 4\;.\;0{,}699 \cong 2{,}796$

4) Logaritmo de una potencia (misma base): $\log_b(b^y)$

Demostración: Usando la prop. 3:

$\log_b(b^y) = y\;\log_b b$

$\mathbf{\log_b(b^y) = y}$

Ej. N°27: $\log_4(4^5) = 5 \qquad \ln(\mathrm{e}^3) = 3 \qquad \log(10^6) = 6$

5) Exponenciación de un logaritmo: $b^{\log_b x}$

Demostración: $\log_b x = c \quad \Leftrightarrow \quad x = b^c$

$b^{\log_b x} = b^{\log_b b^c} = b^c = x$

$\mathbf{b^{\log_b x} = x}$

Ej. N°28: $10^{\log 5} = 5 \qquad e^{\ln 7} = 7$

6) Cambio de base: $\log_a x \rightarrow en\ base\ b$

Demostración:

$\log_a x = c \quad \Leftrightarrow \quad x = a^c$

$\log_b x = d \quad \Leftrightarrow \quad x = b^d$

Igualando x: $a^c = b^d$

Logaritmo m.am.: $\log_b a^c = \log_b b^d$

$c\;\log_b a = d$

$\log_a x\;.\;\log_b a = \log_b x$

$$\mathbf{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Ej. N°29: $ln\,325 = \frac{log\,325}{log\,e} = \frac{2{,}512}{0{,}434} = 5{,}784$

Hallar las siguientes **funciones inversas** (ahora incluyendo logaritmo y exponencial):

9.13) Dada la función: LPE-414

$h: \mathbb{R} \to I_h \,/\, h(\mathrm{x}) = 3^{2x+3} - 1$ R: $h^{-1}(x) = ½ \log_3 (x+1) - 3/2$

Determinar la función inversa y su dominio $Dh^{-1} = (-1;+\infty)$

9.14) Sea la función biyectiva: P2.T1.1411

$g: \mathbb{R} \to (2; +\infty) \,/\, g(\mathrm{x}) = 3^{x+7} + 2$ R: 4

Hallar $g^{-1}(81\,a + 326) - g^{-1}(a + 6)$ siendo a>0

9.15) Dada la función biyectiva: P2.T3.1411

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(\mathrm{x}) = \sqrt[3]{x - 250} + 8$ R: (2;+∞)

Hallar el conjunto $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge f^{-1}(x) > 34\}$

y expresarlo en notación de intervalo

9.16) Dadas las funciones: Rec.1204

$f: (-20; +\infty) \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \log_2(x + 20)$ R:

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = x^2 - 144$

Expresar:

a) $f^{-1}(x)$
b) $(g \circ f^{-1})(x)$
c) Hallar el conjunto de ceros de la función (b)

R:

a) $f^{-1}(x) = 2^x - 20$
b) $(g \circ f^{-1})(x) = (2^x - 20)^2 - 144$
c) $C^0 = \{ 3 ; 5 \}$

9.17) Hallar los valores de x tales que: f(x) – 16 = 0, si se sabe que f es biyectiva y que: P2.T1.1211

R: x = 3/4

$$f^{-1}: D_{f^{-1}} \to (-\infty ; 2] \,/\, f^{-1}(x) = \frac{8 - \sqrt{x + 9}}{4}$$

9.18) Hallar los valores de x tales que: f(x) – 64 = 0, si se sabe que f es biyectiva y que: P2.T2.1211

R: x = 2/3

$$f^{-1}: D_{f^{-1}} \to (-\infty ; 4] \,/\, f^{-1}(x) = \frac{12 - \sqrt{x + 36}}{3}$$

9.19) Determinar las ecuaciones de las asíntotas de la función biyectiva: F.T1.1312

$$g: \mathbb{R} - \{8\} \to \mathbb{R} - \{\mathrm{k}\} \,/\, g(x) = \frac{c\,x + a}{x - 8}$$

Si se sabe que $g^{-1}(x) = g(x)$

R: las rectas son

AV: x = 8

AH: y = 8

9.20) Sean las rectas de ecuaciones: F.T2.1203

p(x) = 5 x – 38 q(x) — R:

Se cortan en un punto de abscisa 4, y una de ellas tiene pendiente 3. Determinar la función inversa de la función:

k = 5/3

s = 10

$$f\ :\ \mathbb{R}-\{k\}\rightarrow\mathbb{R}-\{s\}\ /\ f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{30x-38}{3x-5}$$

9.21) La función: F.T1.1303

R:

$$f\ :\ \mathbb{R}-\{1/4\}\rightarrow \mathrm{I}_f\ /\ f(x)=\frac{12x+k}{4x-1}$$

Tiene función inversa tal que: $f^{-1}(5) = 0$

Hallar:

a) $f^{-1}(x)$
b) Dominio de f^{-1}
c) Conjunto solución de: $f^{-1}(x) + 2 > 0$

$a)\ \ f^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{4x-12}$

$b)\ \ \mathrm{D}_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{3\}$

c)

$$S=(-\infty;3)\cup\left(\frac{29}{9};+\infty\right)$$

9.22) Sea la función biyectiva: P2.T49.1603

R:

$$f\ :\ \mathbb{R}-\{2\}\rightarrow \mathrm{I}_f\ /\ f(x)=\frac{4^x+48}{4^x-16}$$

Determinar la expresión de $f^{-1}(x)$

$$f^{-1}(x)=\log_4\left(\frac{16x+48}{x-1}\right)$$

9.23) Sea la función homográfica genérica: gp

$$f\ :\mathrm{D}_f\ \rightarrow \mathrm{I}_f\ /\ f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

Hallar su función inversa y las rectas asíntotas que tendrá la misma.

R: $f^{-1}(x)=\dfrac{dx-b}{-cx+a}$

AV: x=a/c ; AH: y= −d/c

9.24) La función $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ tiene asíntota horizontal en la recta y=5, y se sabe que que f(0)=7. De su función inversa también se sabe que ella tiene $f^{-1}(0)= -7/5$. Hallar el valor f(1). P2.campus.2103

R: f(1) = 6

9.25) La función $f(x)=\dfrac{x+b}{5x+d}$ corta al eje de abscisas en x=1, y al eje de ordenadas en y = -1/2. R2P2.campus.2103

Calcular el valor de $f^{-1}(1) + f^{-1}(-1)$

R: 11/12

Más problemas sobre **función compuesta** (ahora incluyendo logaritmo y exponencial):

9.26) Para las funciones: $f\!: Df \rightarrow \mathbb{R}\ /\ f(x)=ln(x^2-1)$

$h\!: Dh \rightarrow \mathbb{R}\ /\ h(x)=\sqrt{4-x}$

Hallar: a) f ∘ h b) h ∘ f

R: a) $f \circ h^* : (-\infty\,;3) \to \mathbb{R}$ / $(f \circ h^*)(x) = ln\,(3-x)$ LT-cap5-teoría

b) $h \circ f^* : \left[-\sqrt{e^4+1}\,;\,-1\right) \cup \left(1\,;\sqrt{e^4+1}\right] \to \mathbb{R}/(h \circ f^*)(x) = \sqrt{4 - ln(x^2-1)}$

9.27) Para las funciones: $f: Df \to \mathbb{R}$ / $f(x) = |x|$ $h: Dh \to \mathbb{R}$ / $h(x) = log\ x$

Hallar: a) $f \circ h$ b) $h \circ f$

R: a) $f \circ h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ / $(f \circ h)(x) = |log\ x|$ LT-cap5-teoría

b) $h \circ f^* : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ / $(h \circ f^*)(x) = log|x|$

9.28) Para las funciones: $f: Df \to \mathbb{R}$ / $f(x) = e^x$ $h: Dh \to \mathbb{R}$ / $h(x) = 2x$

Hallar: a) $f \circ h$ b) $h \circ f$

R: a) $f \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $(f \circ h)(x) = e^{2x}$ LT-cap5-teoría

b) $h \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $(h \circ f)(x) = 2\,e^x$

Hallar **dominio** y **conjunto de ceros** de las siguientes funciones:

9.29) $f(x) = \log\,(x-2) + \log\,x - \log\,8$

R: $Df = (2\,;+\infty)$ $C^0 = \{4\}$ LT-TP5-ej-1a

9.30) $t(x) = \sqrt{\ln\,(e^{2x}-1)}$

R: $Dt = \left[\ln\sqrt{2}\,;+\infty\right)$ $C^0 = \left\{\ln\sqrt{2}\right\}$ LT-TP5-ej-1e

9.31) $g(x) = \sqrt{\dfrac{\log\,(x-2) + \log\,x}{x}}$

R: $Dg = \left[1+\sqrt{2}\,;+\infty\right)$ $C^0 = \left\{1+\sqrt{2}\right\}$ gp

Hallar el **dominio** de las siguientes funciones:

9.40) $f(x) = \log_{(-x+5)}\,(2x+6)$

R: $Df = (-3;4) \cup (4;5)$ pex

9.41) $f(x) = \sqrt{log\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)}$

R: $Df = (1\,;+\infty)$ gp

9.42) $f(x) = \log_{(x-2)}\,|2x^2 - 8x + 6|$

R: $Df = (2;3) \cup (3;+\infty)$ pex

9.43) $f(x) = \log(x^2 + 9x + 18)$

R: $Df = (-\infty\,;\,-6) \cup (-3\,;\,+\infty)$ uwcaBook – ej 7.1.1.2.d

9.44) $f(x) = \log_9(|x+3|-4)$

R: $Df = (-\infty\,;\,-7) \cup (1\,;\,+\infty)$ uwcaBook – ej 7.1.1.2.k

Hallar el **conjunto solución** de las siguientes ecuaciones, analizando las CE:

9.45) $\log_{(x-1)} |-2x^2+16x-14| = 2$

R: $S = \{5\,;\,13\}$ pex

9.46) $2\,log(log\,x) = log(3\,logx+2) - log2$

R: $S = \{100\}$ LT-TP5-i8

9.47) $log_2(9-2^x) = 3-x$

R: $S = \{0\,;\,3\}$ web/gp

9.48) $\frac{log(16-x^2)}{log(3x-4)} = 2$

R: $CE = (4/3\,;4)$ $S = \{12/5\}$ web/gp

9.49) $2^{x-3}+2^{x-2}+2^{x-1}+2^x+2^{x+1} = \frac{31}{16}$

R: $S = \{-1\}$ web/gp

9.50) $2^{x+4} - 2^{17-x} = 32704$

R: $S = \{11\}$ P2.T1.1712

9.51) $\log_x 100 + \log x = 3$

R: $S = \{10\,;\,100\}$ LPE-271

9.52) $e^{3x+2} + 3\,e^{6x+2} = 4\,e^2$

R: $S = \{0\}$ LT-TP5-i9

9.53) $ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{4}$

R: $S = \left\{\frac{1-\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}\right\}$ LPE-279

9.54) $\frac{x}{\ln(x^2)} - x = 0$

R: $S = \{-\sqrt{e}\ ;\ \sqrt{e}\}$ LPE-339

9.55) $x^{\frac{1}{2}\log_2 x} = 16x$

R: $S = \left\{\frac{1}{4}\ ; 16\right\}$ LT-TP5-i10

9.9 Poblaciones y crecimiento exponencial

Ej. N°30: [R2.T4.22.03/mod gp] sabiendo que la cantidad de animales que se contagian por una enfermedad, está dada por la función en el tiempo: $n(t) = \dfrac{N}{1+2\,e^{-k\,t}}$ en donde "N" es la población de animales existente, "t" es el tiempo en días, y "k" es una constante que vale k = 0,01/día. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la mitad de la población de animales existente N se contagie?

$\dfrac{N}{2} = \dfrac{N}{1+2\,e^{-k\,t}}$	lo que la consigna del problema dice
$2 = 1 + 2\,e^{-k\,t}$	denominadores iguales
$e^{-k\,t} = 1/2$	reordenando
$ln(e^{-k\,t}) = ln(1/2)$	logaritmo m.a.m.
$-k\,t = ln(1/2)$	por propiedades
$t = \dfrac{ln(1/2)}{-k}$	reordenando
$t = 69{,}31\ días$	resultado

ACTIVIDAD: resolver los siguientes problemas de crecimiento poblacional.

9.70) Suponiendo que el crecimiento poblacional de una ciudad responde a:

$$p(t) = 4600\ \ (1{,}016)^t$$

Donde p(t) es la población, t años después del año 1980.

a) ¿Cuál será la población en 2080?
b) Indicar en cuánto tiempo se duplicará la población existente en 1980.

R: a) 22.497 habitantes b) en 43,67 años LT-TP5-p1

9.71) Un elemento radiactivo tiene vida media de 1690 años (vida media es el tiempo requerido para que desaparezca la mitad de sustancia). Empezando con 30 mg de materia, después de t años hay una cantidad q(t) de materia:

$$q(t) = 30\ \ (1/2)^{k\,t}$$

a) Determinar la constante k
b) ¿Cuánta materia habrá dentro de 2500 años?

R: a) 1/1690 años b) 10,76 miligramos LT-TP5-p2

9.72) La población de una ciudad era de 385.000 habitantes en 1960 y 510.000 habitantes en 1970. Si su crecimiento poblacional puede aproximarse por:

$$N(t) = N_0 \ (e)^{k\,t}$$

Si N_0 es la población inicial, k es una constante, y t son los años transcurridos desde 1960, ¿cuántos habitantes tuvo la ciudad en el año 2000?

R: aproximadamente 1.118.491 habitantes LPE-7

9.73) Un cierto tipo de bacterias bajo cultivo se duplica cada 40 minutos. Si al cabo de dos horas de iniciado el cultivo se cuentan 4800 bacterias, determinar las horas necesarias para que la cantidad de bacterias llegue a ser 307.200.

R: 6 horas P2.campus.21.03 / mod gp

9.10 Problemas mezcla de todo lo anterior

9.74) Sea la función:

$$f: Df \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \frac{\log_a \left[b - \left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]}{\log_a 8}$$

Y sabiendo que f (216) = 2 y que a ∊ $\mathbb{R}^+ - \{1\}$, hallar la constante b

R: $b = 100$ P2.T2.1303

9.75) Hallar el conjunto de ceros de la función: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x - \ x^{4\,log_{81} x}$

R: $S = \{\,1\,;3\,\}$ pex

9.76) Sea la función: $g: D_g \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = \log_k \ \frac{4}{3-7x}$ con $k \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

a) Hallar el dominio de g
b) Determinar la constante k si se sabe que $g\left(\frac{27}{64}\right) + \log_k \ 48 = 4$

R: a) $Dg = (-\infty; 3/7)$ b) k=8 P2.T4.1712

9.77) Sea la función: $f: D_f \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \log_6 \ (169 - x)$

a) Hallar el dominio de f b) Determinar la función inversa de f

R: a) $Df = (-\infty; 169)$ Rec.1303

b) $f^{-1}: \mathbb{R} \to (-\infty; 169)/f^{-1}(x) = 169 - 6^x$

9.78) Sea la función biyectiva: $g: D_g \to I_g \,/\, g(x) = 9\,a\,3^x + b$

Se sabe que $g^{-1}(-360) = 0$ y que $g^{-1}(-270) = 1$

a) Hallar las constantes reales a y b
b) Determinar el conjunto solución de la ecuación:

$$g^{-1}(x) + 6 = log_3 \frac{x^2+405\,x}{15}$$

R: a) $a = 5$; $b = -405$ b) $S = \{243\}$ F.T94.1803

9.79) Para las funciones:

$f: D_f \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = 2 + ln\sqrt{4-x}$ $h: D_h \to \mathbb{R} \,/\, h(x) = \dfrac{x-3}{x^2 - 8x + 15}$

Determinar:

a) El conjunto Df ∩ Dh
b) El valor numérico de $e^{f(x)}\, e^{-2}$ en x = 0
c) La asíntota vertical de la curva gráfica de h

R: a) $S = (-\infty; 3) \cup (3; 4)$ b) 2 c) AV: x = 5 LT-TP5-i2

9.80) Para las funciones:

$f: D_f \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = e^{3x}$ $h: D_h \to \mathbb{R} \,/\, h(x) = \dfrac{2x}{1-x}$

Determinar:

a) El conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,/\, [f(x)]^2 + 9\, f(0) = 10\, f(x)\}$
b) El valor de $h^{-1}(2)$
c) La asíntota horizontal de la curva gráfica de h

R: a) $S = \{\, 0\,;\ 2/3\, ln3 \,\}$ b) 1/2 c) AH: y = -2 LT-TP5-i4 / modif gp

9.81) Determinar el conjunto [k ; 1] ∩ Dg si la función

$f: D_f \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = (1-2k)\, x^2 + 8k\, x\ - (2+8k)$ tiene ceros iguales

Y siendo Dg el dominio de la función $g: D_g \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = log_3 \dfrac{-x+1}{x+1}$

R: $S = [-1/2\ ;\ 1)$ LT-TP5-i6

9.82) Sean las funciones:

$f: D_f \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1}$ $g: D_g \to \mathbb{R} \,/\, g(x)\ es\ función\ lineal$

$h: D_h \to \mathbb{R} \,/\, h(x) = \ln x$ $p: D_p \to \mathbb{R} \,/\, p(x) = \left| \dfrac{1}{x} \right|$

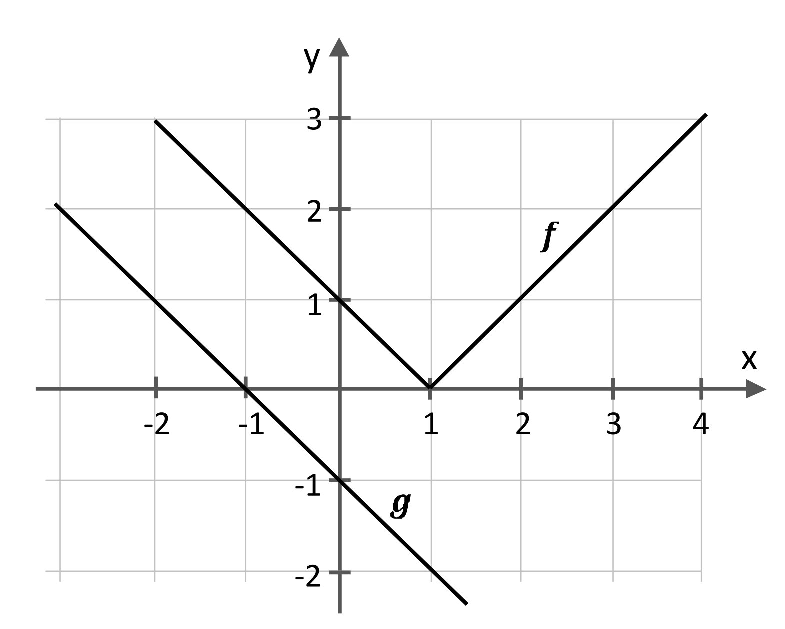
Determinar:

a) Las ecuaciones de las asíntotas vertical y horizontal de la curva que representa gráficamente a la función $\dfrac{g^{-1}(x)}{g(x)}$
b) El conjunto { $x \in \mathbb{R}$ / (f ∘ h) (x) = 0 } ∪ { $x \in \mathbb{R}$ / (f ∘ p) (x) = 1 }
c) El conjunto { $x \in \mathbb{R}$ / p (x-1) = p (x+3) } d) f^{-1} (1)

R: a) AH: $y = 1/m^2$ AV: $x = -b/m$ LT-TP5-i7

b) $S = \{\, 1/2\ ;\ -1/2 \,\}$ c) { -1 } d) 2

9.83) Viendo las representaciones gráficas de las funciones f y g:



Determinar: a) $g^{-1}(1/2)$ b) $(f \circ g) (1)$ c) $(f - g) (-1)$

R: a) −3/2 b) 3 c) 2 LT-TP5-i13

9.84) Sea la función: $f: D_f \to I_f \ / \ f(x) = \frac{2\,x-20}{6\,x-36}$

a) Determinar la función inversa de f, con su dominio y conjunto imagen
b) Con el resultado del punto (a), hallar el conjunto solución de la ecuación siguiente, también el conjunto de existencia de la ecuación.

$$log\ [f^{-1}(x)] = 2$$

R: a) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{1/3\} \to \mathbb{R} - \{6\} / f^{-1}(x) = \frac{18\,x-10}{3\,x-1}$ P2.T1.1812

b) CE = (-∞ ; 1/3) ∪ (5/9 ; +∞) S = { 15 / 47 }

9.85) Sea la función homográfica: $g: \mathbb{R} - \{7\} \to I_g \ / \ g(x) = \frac{x}{x-7} + \frac{7x+a}{21-3x}$

Donde una imagen es g(-3)=0; y "a" es una constante a determinar.

a) Determinar la función inversa de g
b) Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$log_{\,5}\ |g^{-1}(x)| = 1 + log_{\,5}\ |12 - 21x|$$

R: a) $g^{-1}: \mathbb{R} - \{-4/3\} \to \mathbb{R} - \{7\} / g^{-1}(x) = \frac{21x-12}{3\,x+4}$ P2.T1.1903

b) S = { −7 / 5 ; −19/15 }

9.86) Sean α y β dos números positivos mayores que 1. F.T1.Ej3b.2212

Sabiendo que: $log_{\,(\alpha\,.\,\beta)} \sqrt{\beta} = 3$

Hallar el valor del $log_{\,(\alpha\,.\,\beta)}\ \alpha$ R: -5

9.87) Sea $f : Df \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / $f(x) = t + \log_a (2x-b)$. Sabiendo que f tiene una asíntota vertical en $x = -1$, un cero en $x=15$, y que $(-3/4 ; 3)$ pertenece a la gráfica de f, hallar los valores de a, b y t. F.T4.Ej3.2203

R: $a=1/4$; $b=-2$; $t=5/2$

9.88) Sea $f : Df \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / $f(x) = \ln (x-4) + \ln (x+1) - \frac{1}{2} \ln 36$ F.T1.Ej1.2203

Determinar el conjunto de ceros de f. mod gp

R: $C^0 = \{ 5 \}$

10. TRIGONOMETRÍA

TEMA EXPLICADO EN LOS VIDEOS:

2.2 Trigonometría **(parte 1)**



https://youtu.be/aNij0VaqLN8

2.2 Trigonometría **(parte 2)**

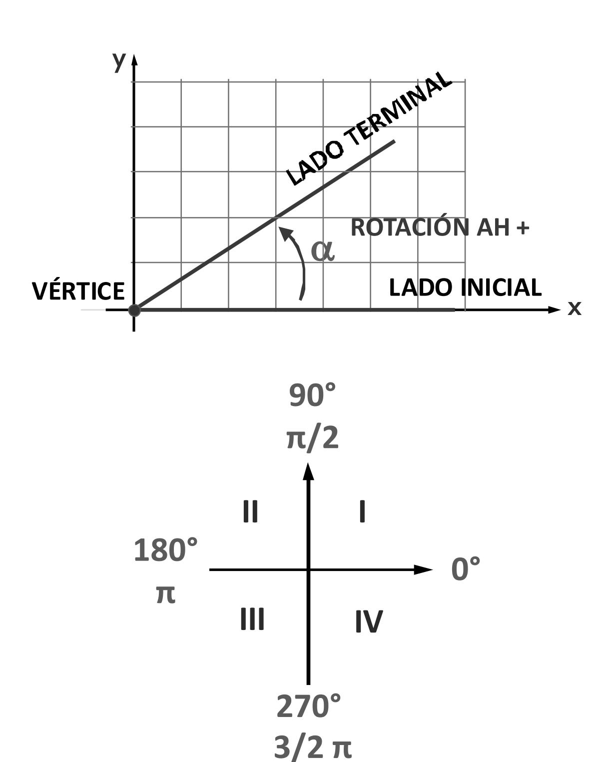


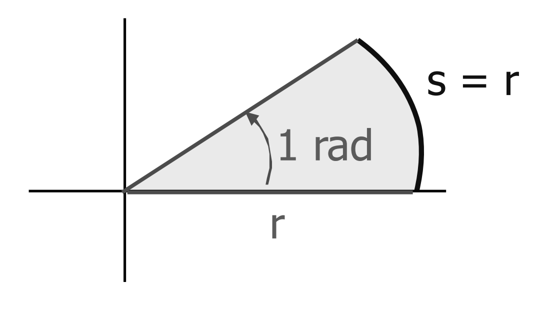
https://youtu.be/AA6urCZV2Z0

10.1 Ángulos planos, radianes, cuadrantes, reducción

Recordando lo visto en 8.1.1, un ángulo necesita ser medido en alguna unidad de medida, eso será una de dos, **1)** los *grados sexagesimales*, que son una fabricación, que asigna 360° a un giro completo de circunferencia, y **2)** los *radianes*, que son verdaderos números reales que representan el arco abarcado, en partes del radio de la circunferencia.

Los ángulos se miden en forma normalizada o estandarizada, CON SIGNO, como las coordenadas o posiciones. Comenzando desde el eje x>0 como lado inicial, los ángulos tendrán signo positivo si giran en sentido antihorario, o tendrán signo negativo, si giran desde ese lado inicial, en sentido horario.





1 rad = 180/π ≅ 57,3°   θ]rad = s/r

ACTIVIDAD: hacer los siguientes ejercicios sobre ángulos.

10.1) Convertir los siguientes ángulos, dados en radianes, **a grados** sexagesimales del primer giro, sin usar calculadora.

a) 5/6 π   b) 5/4 π   c) 7/6 π   d) – π/3   e) 15/2 π

R: a) 150°   b) 225°   c) 210°   d) 300°   e) 270°   gp

10.2) Convertir los siguientes ángulos, dados en grados sexagesimales, **a radianes** del primer giro, sin usar calculadora.

a) 315° b) 120° c) 300° d) -150° e) 750°

R: a) $7/4\,\pi$ b) $2/3\,\pi$ c) $5/3\,\pi$ d) $7/6\,\pi$ e) $\pi/6$ gp

10.3) Hallar los **valores exactos** de las siguientes funciones trigonométricas, sin calculadora, usando ángulos del primer giro.

a) sen 990° d) cos 675°
b) sen 2010° e) cos (–270°)
c) sen (–60°) f) cos 855°

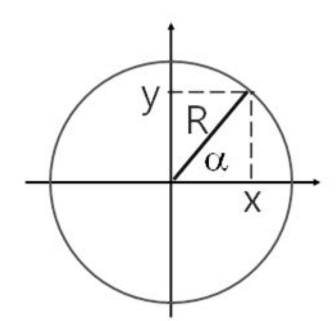
R: a) -1 b) $-1/2$ c) $-\sqrt{3}/2$ d) $\sqrt{2}/2$ e) 0 f) $-\sqrt{2}/2$ gp

10.4) Hallar los **valores exactos** de las siguientes funciones trigonométricas, sin calculadora, usando la identidad trigonométrica indicada.

a) sen 75° = sen (30°+ 45°) b) cos 105° = cos (60°+ 45°)
c) sen (15°) = sen (45°– 30°) d) tg 75°= tg (30° + 45°)

R: a) $\sqrt{2}/4\,(1+\sqrt{3})$ b) $\sqrt{2}/4\,(1-\sqrt{3})$ gp
c) $\sqrt{2}/4\,(\sqrt{3}-1)$ d) $2+\sqrt{3}$

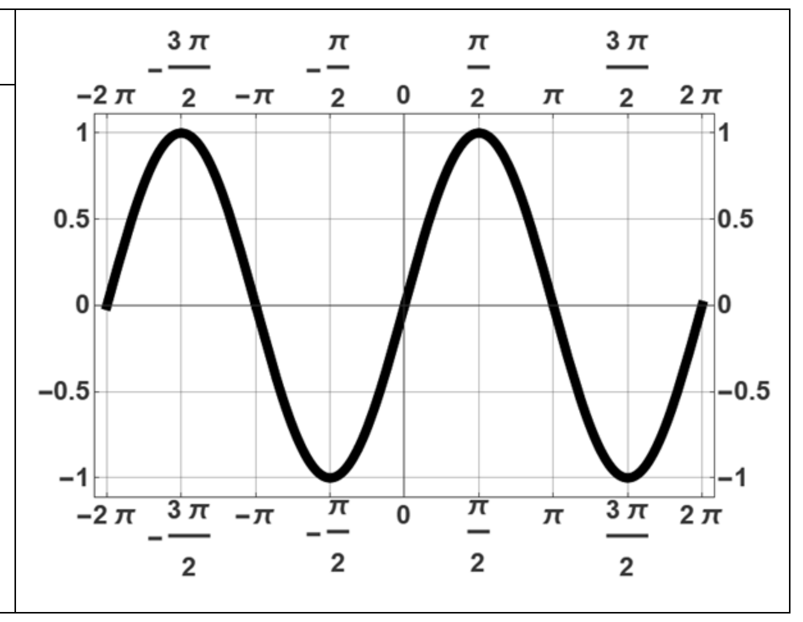
10.2 Funciones trigonométricas elementales (6)



$$sen\ \alpha = \frac{y}{R} \qquad cos\ \alpha = \frac{x}{R}$$

$$tg\ \alpha = \frac{y}{x} \qquad ctg\ \alpha = \frac{x}{y}$$

$$sec\ \alpha = \frac{R}{x} \qquad cosec\ \alpha = \frac{R}{y}$$

Ej. N°2: **f(x) = sen x**	
$D_f = \mathbb{R}$ I_f = [-1 ; 1] Máximos: x = π/2 + 2 k π ; k ϵ ℤ Mínimos: x = 3π/2 + 2 k π ; k ϵ ℤ Función impar y acotada Periódica con T = 2 π C^0 : x = k π ; k ϵ ℤ C^+ = (0 ; π) cuadrante I ; II C^- = (π ; 2 π) cuadrante III ; IV	

Ej. N°3: **f(x) = cos x**

$D_f = \mathbb{R}$

$I_f = [\,-1\,;\,1\,]$

Máximos: $x = 2\,k\,\pi\,;\,k \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $x = \pi + 2\,k\,\pi\,;\,k \in \mathbb{Z}$

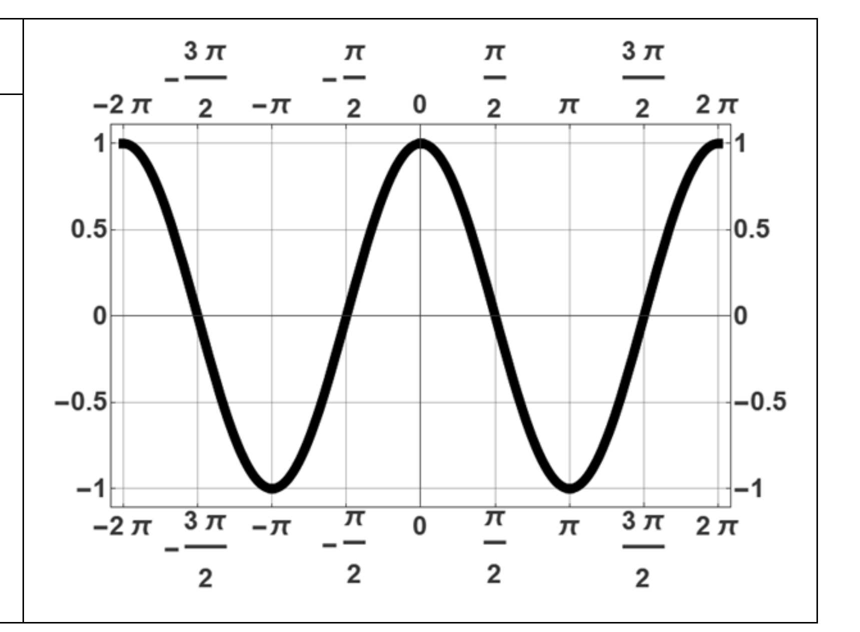
Función par y acotada

Periódica con $T = 2\,\pi$

C^0: $x = \pi/2 + k\,\pi\,;\,k \in \mathbb{Z}$

$C^+ = (-\pi/2\,;\,\pi/2)$ cuadrante I ; IV

$C^- = (\pi/2\,;\,3/2\,\pi)$ cuadrante II ; III



Ej. N°4: **f(x) = tg x**

$D_f = \mathbb{R} - \{\,\pi/2 + k\,\pi\,\}\,;\,k \in \mathbb{Z}$

$I_f = \mathbb{R}$

AV: $x = \pi/2 + k\,\pi\,;\,k \in \mathbb{Z}$

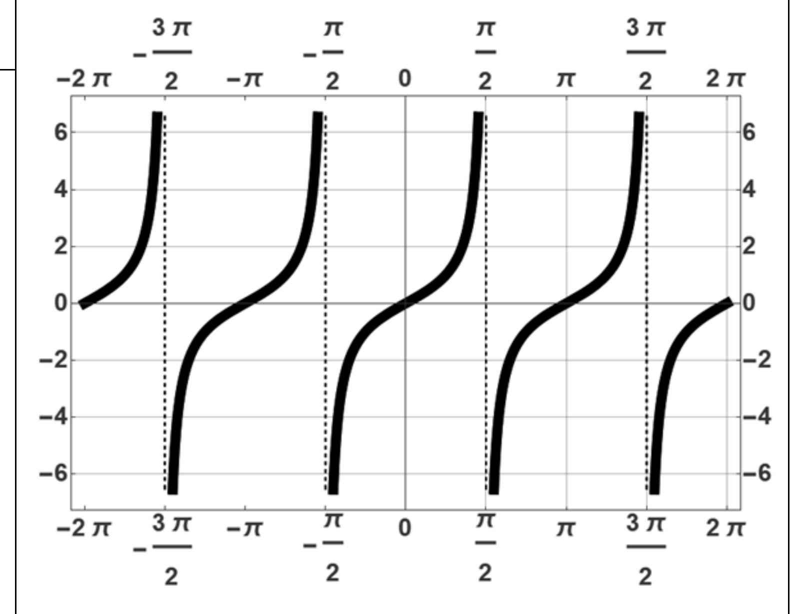
Función impar

Periódica con $T = \pi$

C^0: $x = k\,\pi\,;\,k \in \mathbb{Z}$

$C^+ = (0\,;\,\pi/2) \cup (\pi\,;\,3/2\,\pi)$ cuadrantes I ; III

$C^- = (\pi/2\,;\,\pi) \cup (3/2\,\pi\,;\,2\pi)$ cuadrantes II ; IV



Ej. N°5: **f(x) = ctg x**

$D_f = \mathbb{R} - \{\,k\,\pi\,\}\,;\,k \in \mathbb{Z}$

$I_f = \mathbb{R}$

AV: $x = k\,\pi\,;\,k \in \mathbb{Z}$

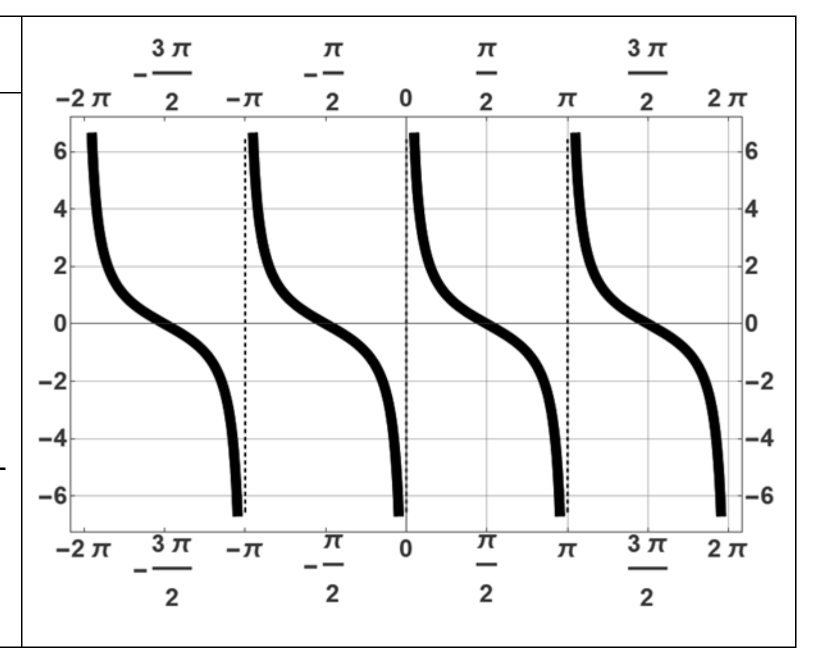
Función impar

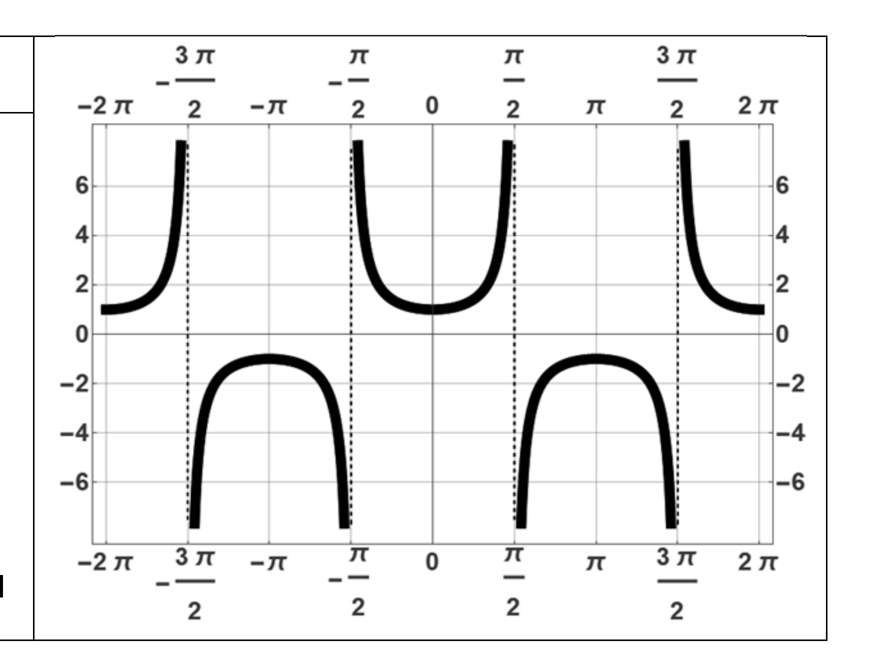
Periódica con $T = \pi$

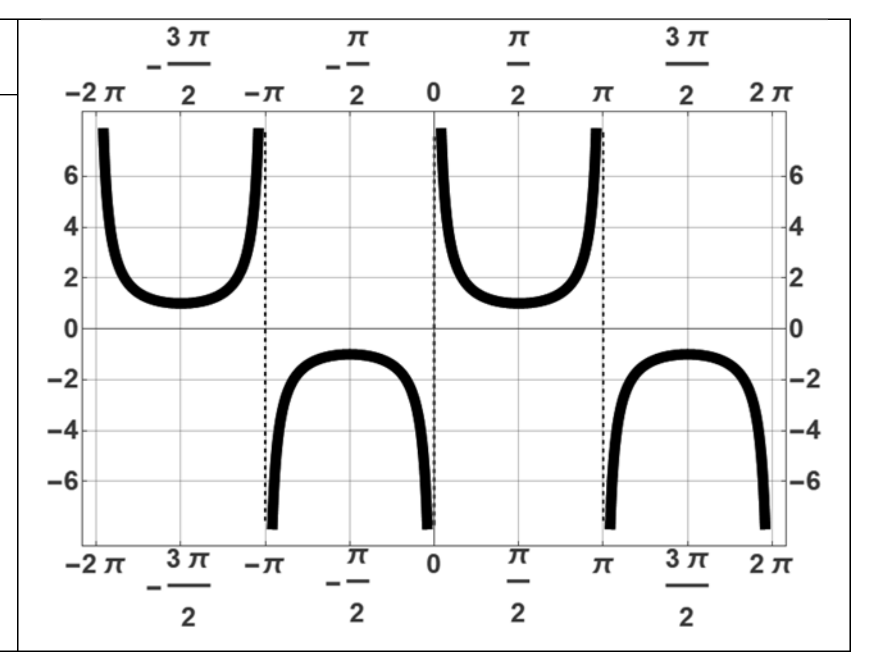
C^0: $x = \pi/2 + k\,\pi\,;\,k \in \mathbb{Z}$

$C^+ = (0\,;\,\pi/2) \cup (\pi\,;\,3/2\,\pi)$ cuadrantes I ; III

$C^- = (\pi/2\,;\,\pi) \cup (3/2\,\pi\,;\,2\pi)$ cuadrantes II ; IV



Ej. N°6: **f(x) = sec x**	
D_f = ℝ - { π/2 + k π } ; k ∈ ℤ I_f = (-∞ ;-1] ∪ [1 ; +∞) AV: x = π/2 + k π ; k ∈ ℤ Función par Periódica con T = 2 π C^0 = ∅ C^+ = (0 ; π/2) ∪ (3/2 π ; 2π) cuadrantes I ; IV C^- = (π/2 ; 3/2 π) cuadrantes II ; III	

Ej. N°7: **f(x) = cosec x**	
D_f = ℝ - { k π } ; k ∈ ℤ I_f = (-∞ ;-1] ∪ [1 ; +∞) AV: x = k π ; k ∈ ℤ Función impar Periódica con T = 2 π C^0 = ∅ C^+ = (0 ; π) cuadrantes I ; II C^- = (π ; 2π) cuadrantes III ; IV	

10.3 Resolver dominios, ceros, compuestas e inversas

10.10) Hallar el dominio de la función f + g sabiendo que: LPE-269

$$f: Df \to If \ / \ f(x) = arc\ sen \frac{1}{\mathrm{x}-1}$$

$$g: Dg \to Ig \ / \ g(x) = ln\,(1 - |x^2 - 2|)$$

R: $D_{f+g} = \left(-\sqrt{3}\,;-1\right)$

10.11) Dada la función: LPE-359

$$f: [0; 2\pi] \to [-1; 1] \ / \ f(x) = senx$$

Hallar el dominio de la función:

$$h: D_h \to I_h \ / \ h(x) = \frac{1}{\ln f(x)}$$

R: $D_h = (0\,;\pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

10.12) Para la función:

$$f: D_f \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = ln\,\frac{-5\ sen^2 x}{1 + 2\ cosx}$$

Determinar el dominio de f en el primer giro [0 ; 2π).

R: Df = $\left(\frac{2}{3}\pi\ ;\ \frac{4}{3}\pi\right) - \{\pi\}$ F.T1.17.07

10.13) Sea la función:

$$g: D_g \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = ln\,\frac{7\ cos^2 x}{2\ senx - 1}$$

Determinar el dominio de g en el primer giro [0 ; 2π).

R: Dg = $\left(\frac{1}{6}\pi\ ;\frac{5}{6}\pi\right) - \{\frac{1}{2}\pi\}$ F.T2.17.07

10.14) Hallar el dominio de la función: gp

$$f(x) = \frac{arc\ sen\ (ln\,x)}{arc\cos\,(\sqrt{x})}$$

R: $D_f = [\ 1/e\ ;\ 1)$

10.15) Hallar el dominio de la función: gp

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + ln\,x + arc\ sen\ x$$

R: $D_g = (0\ ;\ 1]$

10.16) El punto de coordenadas $\left(-\frac{7}{2};\ -36\right)$ es el vértice de la parábola representativa de: P2.T701.1703

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = 4\,x^2 + b\,x + c$

Hallar los ceros de la función compuesta f ₒ g, siendo:

$g: [0\ ;2\pi) \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = cos\ x$

R: $C^0 = \left\{\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\right\}$

10.17) Dada la función: P2.T701.1703

$$g: D \subseteq [\ 0\ ;\ 2\pi\ ) \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = \frac{1}{8 - 4\ sen^2\ x - 10\ cosx}$$

Determinar el dominio Dg en el intervalo [0 ; 2π)

R: $D_g = [\ 0; 2\pi) - \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$

10.18) Determinar los ceros de la función: P2.T201.1703

$f: [\ 0\ ;\ 2\pi\ ) \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = 6 - |8\cos x + 2|$

R: $C_f^0 = \left\{\frac{\pi}{3}; \pi\ ; \frac{5\pi}{3}\right\}$

10.19) Si x = 1/2 ; y = -3/2 son respectivamente las ecuaciones de la asíntota vertical y de la asíntota horizontal, del gráfico de la función: LT-TP6-i6 / modif gp

$$f: D_f \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \frac{a\,x + 5}{c\,x - 2}$$

R: 5/6

Calcular $(f^{-1} \circ g)(\pi)$ si se sabe que la función g es:

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = sen\ x$

10.20) Dadas las funciones expresadas a continuación: LT-TP6-i8

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = 3\ sen\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = 3^x$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ h(x) = \frac{3-x}{2+x}$

$t: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ t(x) = x^2 - x$

Determinar:

a) Las soluciones de la ecuación $g(x) + \frac{3}{g(x)} - 4 = 0$
b) Amplitud y período de la función *f*
c) Calcular $h^{-1}(0)$
d) Valor exacto de $(t \circ f)(-\pi)$

R:
$a)\ S = \{0\,;1\}$
$b)\ A = 3\ ;\ T = \pi$
$c)\ 3$
$d) -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{27}{4}$

10.21) Dadas las siguientes funciones: LT-TP6-i10

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = 9^{\log_4 x} + 27$

$g: [\,0\,;\ 2\pi\,) \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = sen2x - cosx$

Determinar el conjunto:

$\{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) = 3^{\log_4 x}\ \ 12\} \cup \{x \in [\,0\,;\ 2\pi\,) \ / \ g(x) = 0\}$

R: $\left\{4; 16; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right\}$

10.22) Hallar el conjunto de ceros de la función siguiente:

$g: [\,0\,;\ 2\pi\,) \to \mathbb{R} \ /g(x) = 2^{\sqrt{3}\ senx} - 8^{\,cosx}$

R: $C^0 = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$ P2.T116.18.03

10.23) Determinar el conjunto de ceros de la función h siguiente:

$h: (0\,;\ 2\pi) - \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R} \ / \ h(x) = (1 + tgx)(1 - tgx) + sec^2x + senx - 5/2$

R: $C^0 = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$ P2.T1.1712

10.24) Determinar el conjunto de ceros de la función f siguiente:

$f: [\,0\,;\ 2\pi\,) \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = cosx + \sqrt{3}\ sen(\pi - x)$

R: $C^0 = \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$ P2.T1.11.02 / mod gp

10.25) Sean las funciones h y g:

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ h(x) = 2x - k$ $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/g(x) = x^2 + (k+1)\,x + 1$

Determinar: a) La constante k si $(g \circ h)(2) = 1$

b) El conjunto solución de la inecuación $(g \circ h)(x) \geq 4x^2$

R: a) k = 4 b) $S = (-\infty\ ;\ -1/2\ ]$ P2.T1.1712

10.26) Sean las funciones g y h:

$g: \mathbb{R} - \{\text{m}\} \to \mathbb{R} - \{3\}\ /\ g(x)\ = \dfrac{24\,x + 72}{k\,x + k + 10}$

$h: [\,0\ ;\ 2\pi\,) \to \mathbb{R}\ /\ h(x)\ = sen\ x + cos\ x$

Determinar el conjunto solución de la ecuación: $(g \circ h)(x) = 4$

R: $S = \{\ 3\pi/4\ \ ;\ 7\pi/4\ \}$ P2.T148.1803

10.27) Hallar la ecuación de la recta que tiene ángulo de inclinación 120°, y que pasa por el punto (1 ; 2).

R: $y - 2 = -\sqrt{3}\,(x - 1)$ LT-TP6-5.1

10.28) Determinar el ángulo de inclinación de la recta 5x + 2y = 6

R: $111°\,48'$ LT-TP6-5.2

10.4 Identidades trigonométricas

Las identidades son igualdades verdaderas siempre. No se resuelven, se demuestran. No hay que hallar valores de x que la hagan verdadera, porque no son ecuaciones.

Las ultra-básicas

1)	$sec\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha}$	6)	$sen\ \alpha = cos(\pi/2 - \alpha)$
2)	$cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha}$	7)	$cos\ \alpha = sen(\pi/2 - \alpha)$
3)	$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$	8)	$tg\ \alpha = ctg(\pi/2 - \alpha)$
4)	$ctg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha}$	9)	$sen\ \alpha = sen(\pi - \alpha)$
5)	$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$	10)	$cos\ \alpha = -cos(\pi - \alpha)$
		11)	$tg\ \alpha = -tg(\pi - \alpha)$

Seno y coseno de sumas y diferencias

12)	$sen\ (\alpha + \beta) = sen\alpha\ cos\beta + sen\beta\ cos\alpha$	seco-seco / bueno (+)
13)	$sen\ (\alpha - \beta) = sen\alpha\ cos\beta - sen\beta\ cos\alpha$	
14)	$cos\ (\alpha + \beta) = cos\alpha\ cos\beta - sen\alpha\ sen\beta$	coco-sese / malo (−)
15)	$cos\ (\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sen\alpha\ sen\beta$	

16) $$tg\ (\alpha \pm \beta) = \frac{tg\ \alpha \pm tg\ \beta}{1 \mp tg\alpha\ .\ tg\beta}$$

Ángulo doble

---

17) $$sen\ (2\alpha) = 2\ sen\alpha\ cos\alpha$$

18) $$cos\ (2\alpha) = 2\ cos^2\alpha - 1$$

19) $$cos\ (2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

20) $$cos\ (2\alpha) = 1 - 2\ sen^2\alpha$$

Suma y diferencia de senos y cosenos / producto de senos y cosenos

---

21) $$sen\ p\ + sen\ q = 2\ sen\frac{p+q}{2}\ cos\frac{p-q}{2}$$

22) $$sen\ p - sen\ q = 2\ sen\frac{p-q}{2}\ cos\frac{p+q}{2}$$

23) $$cos\ p\ + cos\ q = 2\ cos\frac{p+q}{2}\ cos\frac{p-q}{2}$$

24) $$cos\ p - cos\ q = -2\ sen\frac{p+q}{2}\ sen\frac{p-q}{2}$$

25) $$sen\ \alpha\ .\ sen\ \beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)]$$

26) $$cos\ \alpha\ .\ cos\ \beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)]$$

Ángulo mitad

---

27) $$sen\ \alpha = 2\ sen\ \frac{\alpha}{2}\ cos\frac{\alpha}{2}$$

28) $$cos\ \alpha = 2\ cos^2\ \frac{\alpha}{2} - 1$$

29) $$cos\ \alpha = cos^2\ \frac{\alpha}{2} - sen^2\ \frac{\alpha}{2}$$

30) $$cos\ \alpha = 1 - 2\ sen^2\ \frac{\alpha}{2}$$

31) $$cos\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}$$

32) $$sen\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$$

ACTIVIDAD: Verificar si las siguientes igualdades son identidades, hallando también sus condiciones de existencia (valores admitidos en los reales), para el primer giro:

10.40) $\frac{sen\ x}{1 - cos\ x} = \frac{1 + cos\ x}{sen\ x}$

R : CE: $x \neq 0 \ \wedge \ x \neq \pi$ LT-TP6-3.1

Es identidad (1°miembro igual al 2°miembro $\forall x \in$ CE)

10.41) $cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

R : CE: $x \in \mathbb{R}$ LT-TP6-3.2

Es identidad (1°miembro igual al 2° miembro $\forall x \in$ CE)

10.42) $tg(arc\ sen\ x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

R : CE: $x \neq \pm 1$ LT-TP6-3.5

Es identidad (1°miembro igual al 2° miembro $\forall x \in$ CE)

10.43) $sec^2\ x = 1 + tg^2\ x$

R : CE: $x \neq \pi/2 \ \wedge \ x \neq 3/2\ \pi$ gp

Es identidad (1°miembro igual al 2° miembro $\forall x \in$ CE)

10.44) $(sen\ x\ + cos\ \ x)^2\ +\ (sen\ x - cos\ \ x)^2 = 2$

R : CE: sin restricciones web

Es identidad (1°miembro igual al 2° miembro $\forall x \in$ CE)

10.5 Ecuaciones con trigonometría

Hallar el conjunto solución en $x \in [\ 0\ ;\ 2\pi)$ de las siguientes ecuaciones:

10.50) $2\ cos\ x + \sqrt{3} = 0$ LT-TP6-4.1 R: $S = \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$

10.51) $sen\ x + cos\ x = 1$ LT-TP6-4.4 R: $S = \left\{0; \frac{\pi}{2}\right\}$

10.52) $cos\ 2x - cos\ x = 0$ LT-TP6-4.6 R: $S = \left\{0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$

10.53) $sen\ 2x + \cos 2x + sen^2 x = cos^2 x$ LT-TP6-4.8 R: $S = \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$

10.54) $cos^8 x - sen^8 x = 0$ LT-TP6-4.10 R: $S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

10.55) $\frac{cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{-tg(\pi - x)} = \sqrt{3}\ cos\ x$ LT-TP6-i4.2

R: $S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$

10.56) Dadas las funciones: P2.T1.0903

h (x) = ½ ctg x g (x) = sen 2x

hallar x ∈ [0 ; 2π) / h (x) = g (x)

R: $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2};\ \frac{5}{6}\pi\ ;\ \frac{7}{6}\pi\ ; \frac{3}{2}\pi\ ; \frac{11}{6}\pi \right\}$

10.57) sen 2x = 1+ cos 2x LPE-239 R: $S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2};\ \frac{5}{4}\pi\ ; \frac{3}{2}\pi \right\}$

10.58) ln (−2 ctg x) + ln sen x = ½ ln 2 P2.T701.1703 R: $S = \left\{ \frac{3}{4}\pi \right\}$

10.59) cos x sen 2x + 4 sen^2x = 4 LPE-246 R: $S = \left\{ \frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi \right\}$

10.60) 3 tg^2x + 1 = 5 sec x LPE-144 R: $S = \left\{ \frac{\pi}{3};\ \frac{5}{3}\pi \right\}$

10.61) $5^{sen\,x\,+\,1} - \sqrt{5} = 0$ P2.T5.1411 R: $S = \left\{ \frac{7}{6}\pi\ ;\ \frac{11}{6}\pi \right\}$

10.62) $log_{sen\,x}\left(\sqrt{2}\cos x - cos^2x\right) = 2$ P2.T502.1703 R: $S = \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$

10.63) $1 + log_{tg\,x}(3) = log_{tg\,x}\left(\sqrt{3} + 2\,tgx\right)$ Rec2.1812 / mod.gp R: $S = \left\{ \frac{\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3} \right\}$

10.64) Hallar el conjunto solución de la ecuación: P2.T37.1603

$$\frac{sen\ 2x}{\cos x} + tg\ x = cos\frac{\pi}{2}$$

con x ∈ [0 ; 2π) – { 1/2 π ; 3/2 π }

R: $S = \left\{ 0; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3} \right\}$

10.65) $\sqrt{3}\,sen\ x\ + 2\,cos^2x = -1$ P2.T63.1603 R: $S = \left\{ \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$

10.66) $log_{cos\,x}\left(\sqrt{4/3}\,sen\ x - sen^2x\right) = 2$ P2.T501.1703 R: $S = \left\{ \frac{\pi}{3} \right\}$

10.67) $2^{1-\cos x} = \sqrt{2}$ LT-TP6-i7 R: $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$

10.68) $\sqrt{36\,senx + 82} = \sqrt{36\,senx + 694} - 18$ F.T2.1803 R: $S = \left\{ \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$

10.69) F.T2.1803

$$\frac{7\,sen^2x}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \cos x} = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \cos x\right)$$

R: $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$

10.70) Si se da que tenemos las relaciones siguientes: LT-TP6-i4.1

$$cos\ \beta = \frac{1+2k}{6k-1} \quad y \quad sec\ \beta = \frac{2}{4k-5}$$

R: $k = 3/2$

Hallar el valor de k que haga verdaderas ambas igualdades anteriores

10.71) $2\ sen\ x - cosec\ x = 1$ F.T1.1812 R: $S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

10.72) Hallar la constante k, tal que la recta de ecuación: P2.T3.11.02

k x + 7 y = 9 R: $k = \frac{21}{4}$

Tiene ángulo de inclinación α, del cual se sabe que:

$$sen\ \alpha = \frac{21}{35} \quad cos\ \alpha = -\frac{28}{35}$$

10.73) $5^{1+sen\ x} - \sqrt{5^3} = 0$ P2.T3.11.02 R: $S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

10.74) $4^{sen^2 x} + 4^{cos^2 x} = 4$ Youtube - IngEDarwin R: $S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

10.75) $2\left(sen\ x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 3\left|sen\ x + \frac{1}{2}\right|$ F1.T4.22.03

R: $S = \left\{0; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$

10.6 Inecuaciones con funciones periódicas

Hallar el conjunto solución en x ∈ [0 ; 2π) de las siguientes inecuaciones:

10.80) $sen\ x \geq \sqrt{3}/2$ gp R: $S = [\ 60°;\ 120°]$

10.81) $sen\ x \leq 1/2$ gp R: $S = [\ 0°;\ 30°] \cup [\ 150°; 360°)$

10.82) $cos\ x \leq \sqrt{3}/2$ gp R: $S = [\ 30°;\ 330°]$

10.83) $cos\ x \geq \sqrt{3}/2$ gp R: $S = [\ 0°;\ 30°] \cup [\ 330°; 360°)$

10.84) $cos\ x \leq 1/2$ gp R: $S = [\ 60°;\ 300°]$

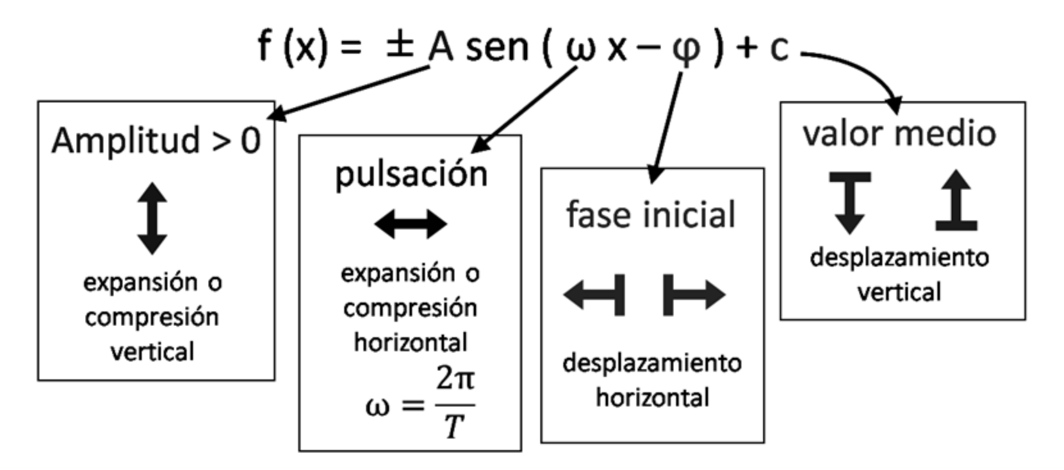
10.85) $2 - sen\ (x + 60°) \leq \sqrt{3}$ pex R: $S = [0; 104{,}4°] \cup [\ 315{,}6°; 360°)$

10.86) $2 - cos\ (x + 60°) \leq \sqrt{3}$ pex R: $S = [0; 14{,}5°] \cup [\ 225{,}5°; 360°)$

10.87) $tg\ x \geq 5$ gp R: $S = [76°; 90°) \cup [\ 256°; 270°)$

10.7 Funciones senoidales transformadas

Incorporando coeficientes a la función seno elemental (sen x) se pueden formar funciones senoidales que representen cualquier función periódica del tipo seno o coseno, usando las técnicas vistas en desplazamiento gráfico. El modelo es:



En donde:

A : amplitud, es un número real positivo, que según su valor sea mayor o menor que uno, produce expansión ó compresión vertical.

Ciclo : es la secuencia de pares ordenados más pequeña, que forma la función.

T : período, distancia en x que la función necesita para desarrollar un ciclo completo.

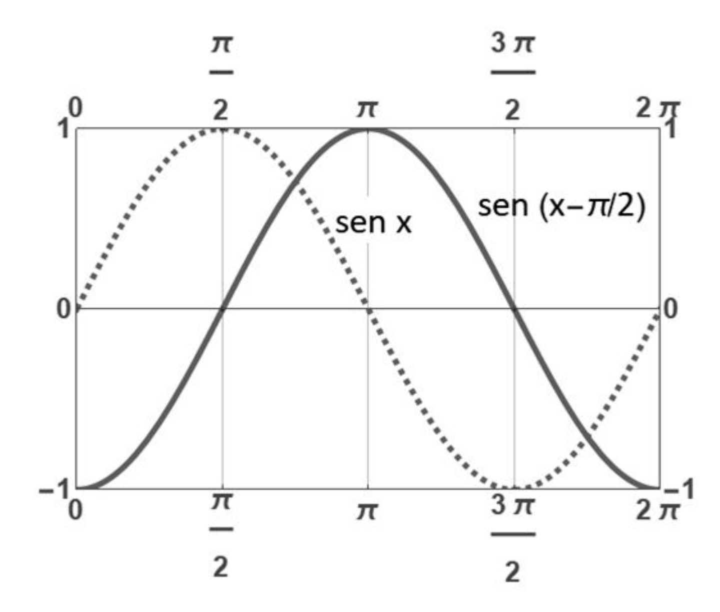
ω : pulsación, multiplicador de x, que produce expansión/compresión horizontal, relacionado con el período según $\omega = 2\pi / T$.

φ : fase inicial, es el valor del desplazamiento en el eje $x > 0$ de la función sen x, según lo visto anteriormente en el capítulo de funciones.

c : valor medio, es el promedio de la función en un ciclo.

Ej. N°8: $f(x) = \text{sen}\,(x - \pi/2)$

Es la función elemental sen x desplazada a derecha en π/2 (φ=π/2):

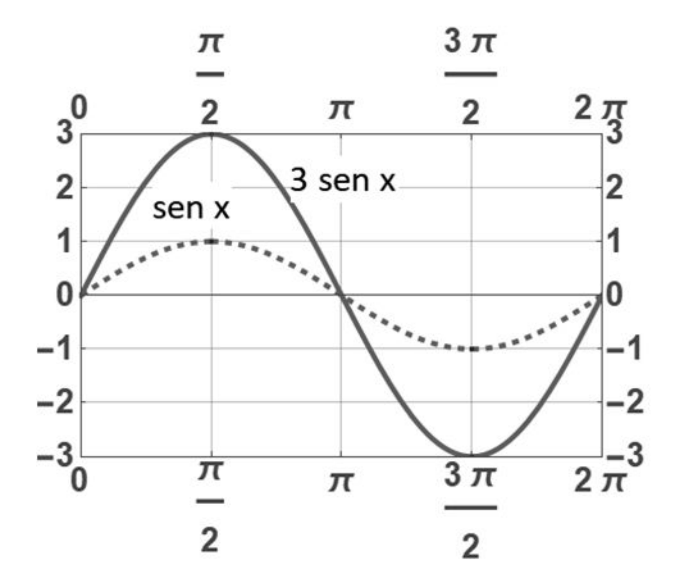


Gráficamente se nota que eso es la función cos x verticalmente invertida, ¿qué tal demostrarlo analíticamente?

$$\text{sen}(x - \pi/2) = \text{sen}\, x \,.\, \cos \pi/2 - \text{sen}\, \pi/2 \,.\, \cos x = -\cos x \; ✔$$

Ej. N°9: f(x) = 3 sen x

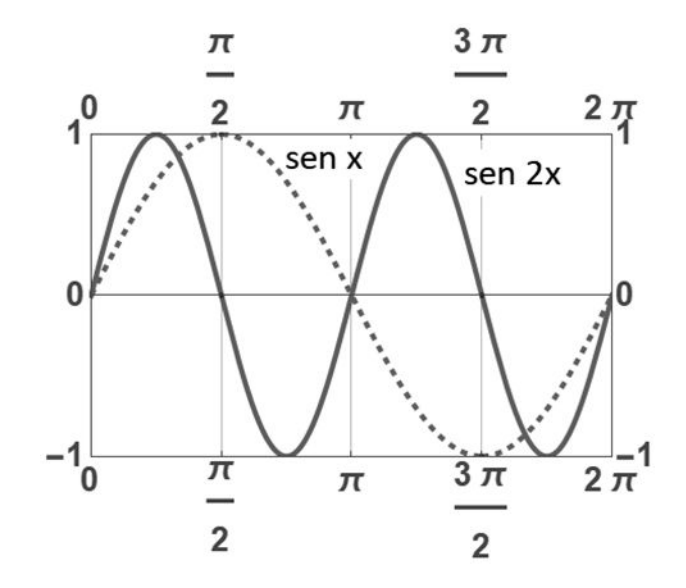
Es la función elemental sen x expandida verticalmente 3 veces (multiplicador A=3).



Ej. N°10: g(x) = sen 2x

Es la función elemental sen x comprimida horizontalmente 2 veces (divisor ω=2).

El período es T = π.



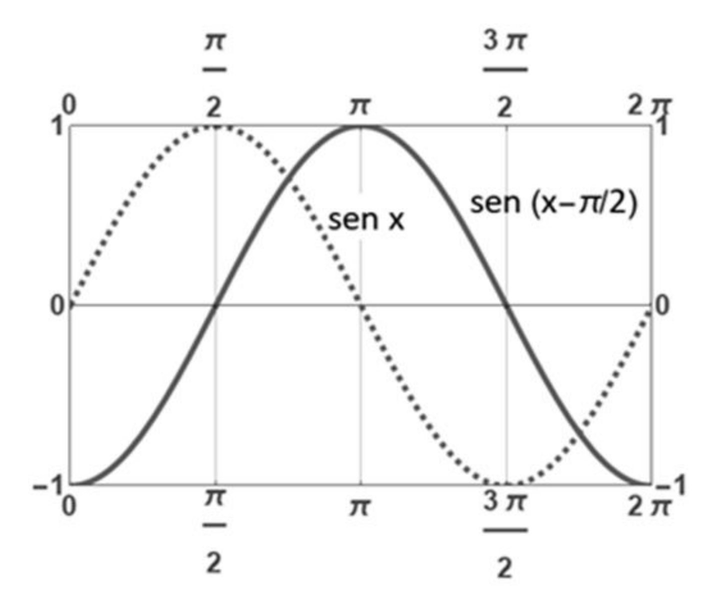
Ej. N°11: h(x) = sen (2x – π)

El error frecuente en este caso es desplazar en π, eso está mal porque el desplazamiento en π sería si graficásemos en función de la variable z=2x, que no es la idea. Para ver el desplazamiento en x, lo hacemos explícito factoreando el 2:

$$\text{sen}(2x - \pi) = \text{sen}\,[2\,(x - \pi/2)]$$

a) La primera transformación será entonces hacerle un desplazamiento horizontal en x a derecha en π/2 a la función sen x:

La función elemental sen x desplazada a derecha en π/2 (φ=π/2):



b) A esto le sigue la transformación que indica el ω=2 (compresión horizontal). Lo que puede confundirnos es desde donde comprimir el ciclo. Para eso tomaremos un puntos reales por donde debe pasar la función h(x), por ej. un cero en el primer giro:

Ceros de h(x): $\quad \text{sen}\ (2x - \pi) = 0$

$2x - \pi = 0\ ;\ \pi$

$x = \pi/2\ ;\ \pi$

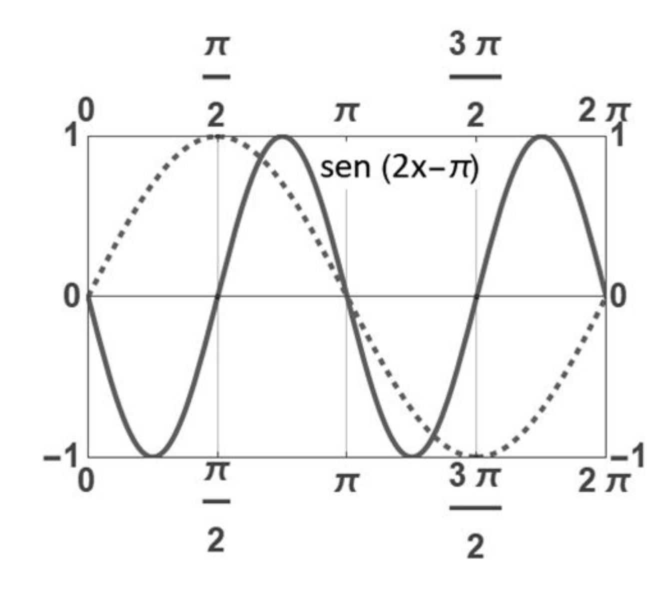
Pero acá encontramos otra dificultad, en el medio de estos dos ceros, la función, ¿va hacia arriba o hacia abajo? Eso se arregla buscando un máximo o un mínimo:

Máx de h(x): $\quad \text{sen}\ (2x - \pi) = 1$

$2x - \pi = \pi/2$

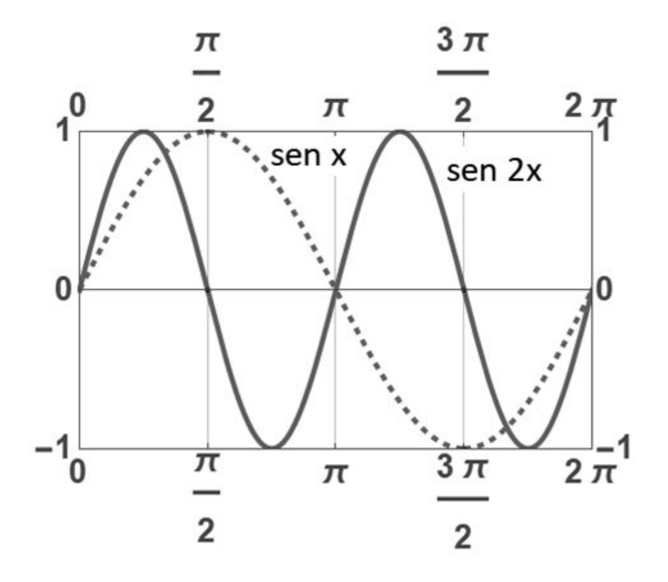
$x = 3/4\ \pi$

Así queda finalmente con ambas transformaciones hechas:

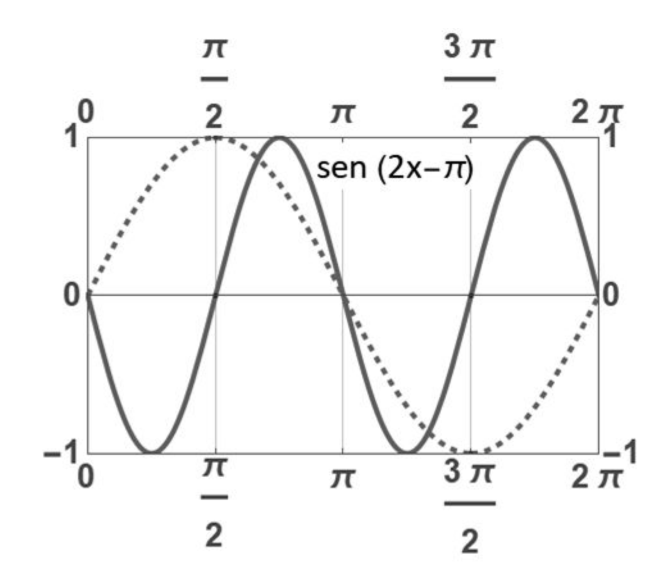


Opción: esto también se puede hacer invirtiendo la secuencia de pasos a-b anterior, es decir primero comprimir horizontalmente sen x (para quedar sen 2x), y después desplazar en π/2 lo que queda:

La primera transformación es comprimir horizontalmente (ω=2).

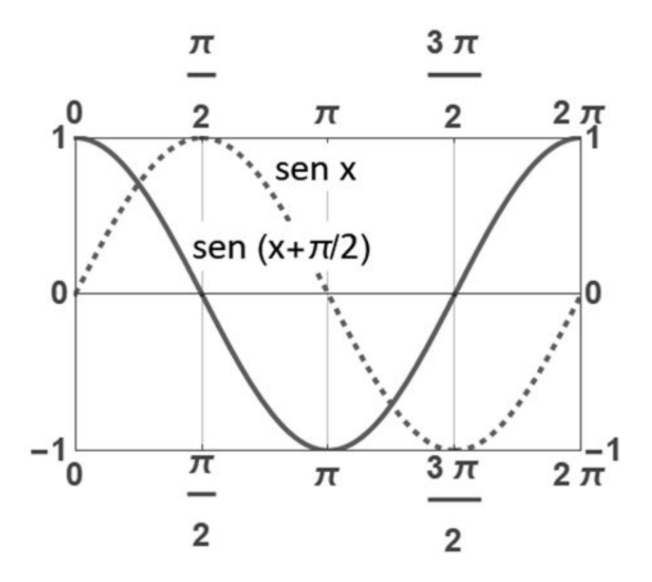


La siguiente transformación es desplazar a derecha, pero cuidado que es un desplazamiento en x, o sea π/2.

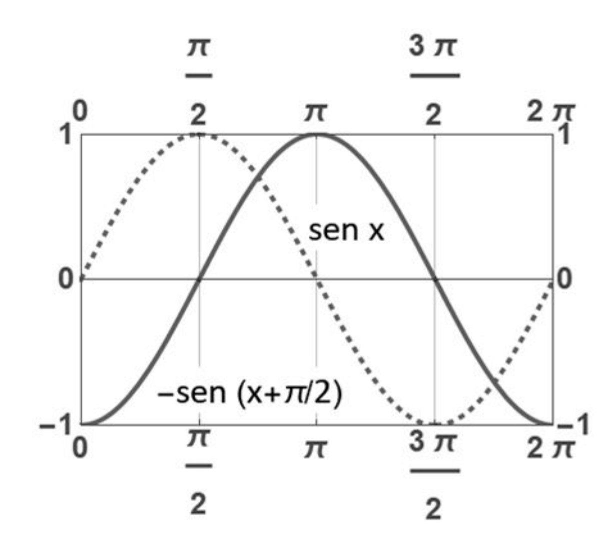


<u>Ej. N°12</u>: $f(x) = -\operatorname{sen}(x + \pi/2) + 1$

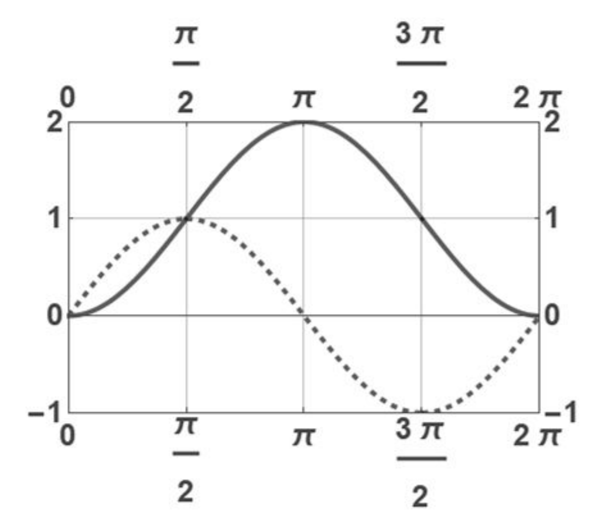
a) La primera transformación es desplazar la función elemental sen x a izquierda horizontalmente en π/2.



b) La siguiente transformación es invertir verticalmente lo anterior (signo menos).



c) La última transformación es un desplazamiento vertical, que "sube" la función (c=1).



<u>ACTIVIDAD</u>: resolver transformando funciones senoidales.

10.100) Sea la función sobreyectiva: LPE-150 (modificado gp)

$f: \mathbb{R} \rightarrow [\,1\,;9\,]\,/\,f(x) = A\ sen\ (3x + c) + 5$

R : A=4 ; If =[1 ; 9]

T = 2/3 π ; ω = 3

Con curva senoidal. Hallar período, la constante positiva A, el conjunto imagen y la pulsación ω

10.101) Sea la función sobreyectiva: LPE-353

$f: \mathbb{R} \rightarrow [\,3\,;11\,]\,/\,f(x) = A\ sen\ (3x + \pi) + 7$

R : A=4 ; T = 2/3 π

Donde A > 0, con curva del tipo senoidal. Hallar el período y la amplitud de la función f.

10.102) Sea la función: P2.T5.1011

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\,/\,g(x) = 12\ \ sen\ 3x\ \cos 3x$

R : A=6 ; Ig =[-6 ; 6]

Hallar T ; A ; Ig ; ω

T = π/3 ; ω = 6

10.103) Sea la función: P2.T2.11.02

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\,/\,h(x) = 18\ \ sen\ 5x\ \cos 5x$

R : A=9 ; Ih =[-9 ; 9]

Hallar T ; A ; Ih ; ω

T = π/5 ; ω = 10

10.104) Sea la función sobreyectiva senoidal (con A >0): P2.T6.1411

$g: \mathbb{R} \to [-5\,;5\,]\ /\ g(x) = A\ \ sen(7x+1)$ R : A=5 ; T = 2π/7

Hallar amplitud y período de la función

10.105) Sean las funciones: P2.T148.1803

R : T = π/6

$$g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ /\ g(x)\ = -7 + \sqrt{\frac{x+588}{12}}$$

$$h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\ \to \mathbb{R}\ /\ h(x)\ = 8\,sen\ \frac{g^{-1}(x)}{x}$$

Determinar el período de la función h

10.106) El período de la función *f* es 30, hallar la constante k, y la amplitud de la función *f*, si se sabe de ella: Rec2.1812 / mod.gp

R : k=π/15 ; A = 22

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ /\ f(x) = A\ \ sen\ (kx + 2\pi/5)$

$f(-7/2) = 11$ k > 0

10.107) Hallar la constante k, el período T, y la amplitud A, de la función sobreyectiva siguiente: Rec2.T2R.11.11

R : k=1/3

T = 6 π

A = 5

$f: \mathbb{R} \to [-5; 5]\ /\ f(x) = A\ \ sen\ (kx + 1)$

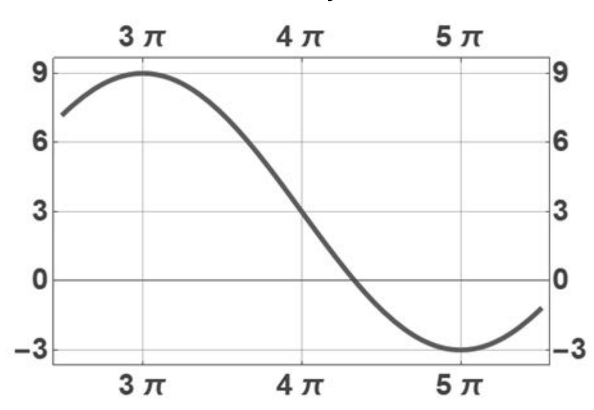
Sabiendo que:

$f(c) = f(c+6\pi) = f(c+12\pi) =\ f(c+18\pi)$

10.108) Sea una función biyectiva f en los números reales, tal que $f^{-1}(8) = -10$. Sea la función g en los números reales, de la cual se sabe que g(x) = A cos (x-1), teniendo la misma su imagen máxima en 10. Sabiendo que A < 0, calcular (f ∘ g) (1). P2.campus.21.03

R : 8

10.109) La función f graficada en un tramo más abajo, tiene un valor máximo en f(3π)=9, y tiene un valor mínimo en f(5π)=-3. Escribir f(x) y hallar el valor de f(π). P2.campus.21.03 / mod gp



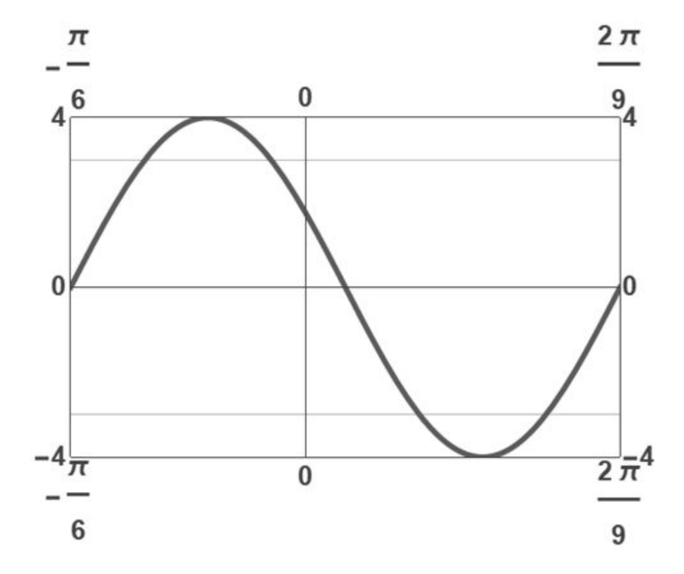
R :

f(x) = 6 sen (1/2 x – π) +3

f(π) = –3

10.110) En la figura se ve un ciclo de la gráfica de f. Sabiendo que la función tiene la forma f(x) = A sen (ωx–φ), construír la función con todos sus coeficientes.

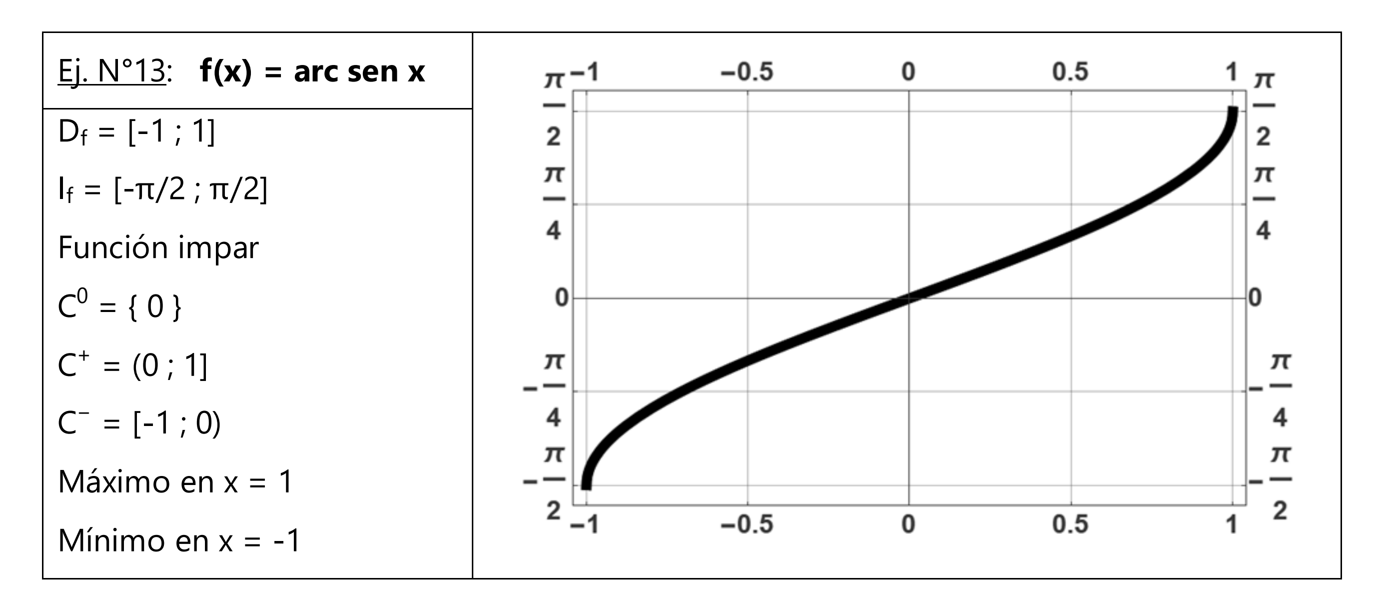
P2.T1.22.03 / mod gp



R :

f(x)= –4 sen (36/7 x – π/7)

10.8 Funciones trigonométricas inversas



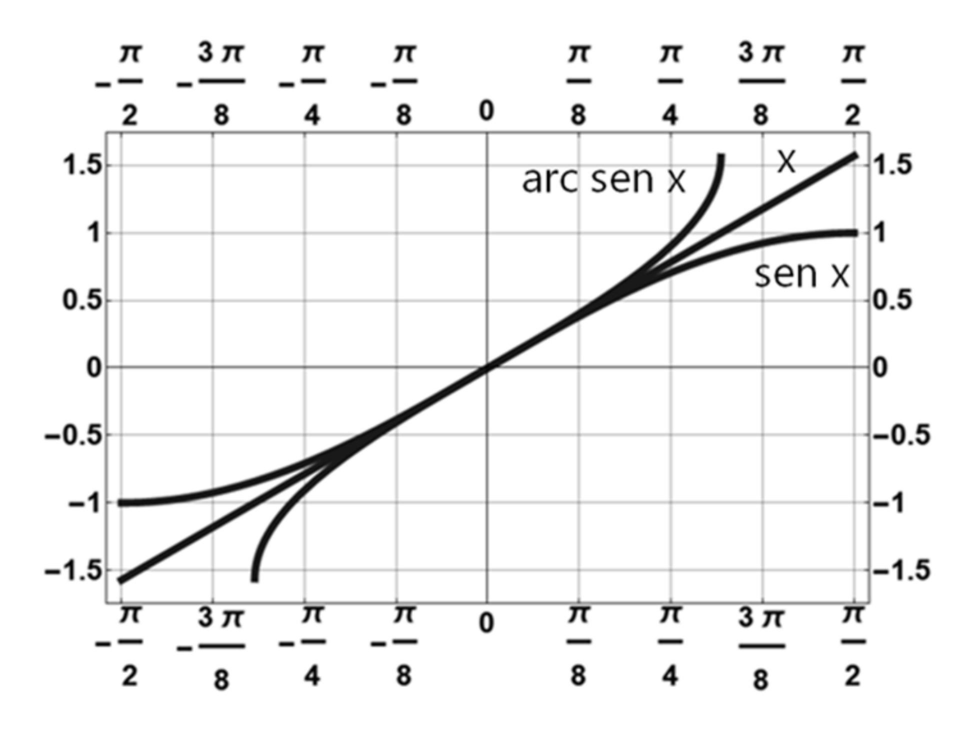
Ej. N°13: **f(x) = arc sen x**
D_f = [-1 ; 1]
I_f = [-π/2 ; π/2]
Función impar
C^0 = { 0 }
C^+ = (0 ; 1]
C^- = [-1 ; 0)
Máximo en x = 1
Mínimo en x = -1

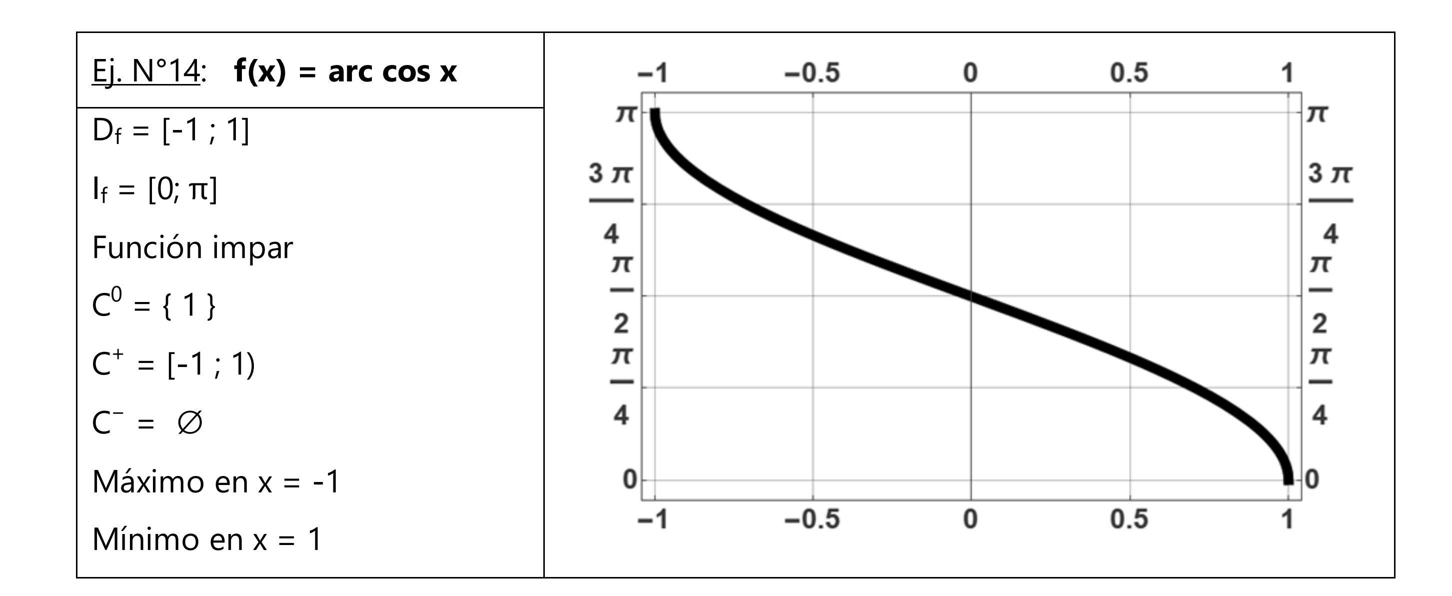
Tomando el tramo biyectivo lo más grande posible de sen x:

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1] \;/\; f(x) = sen\ x$$

$$f^{-1}: [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \;/\; f(x) = arc\ sen\ x$$

Simetría gráfica sen x ↔ arc sen x



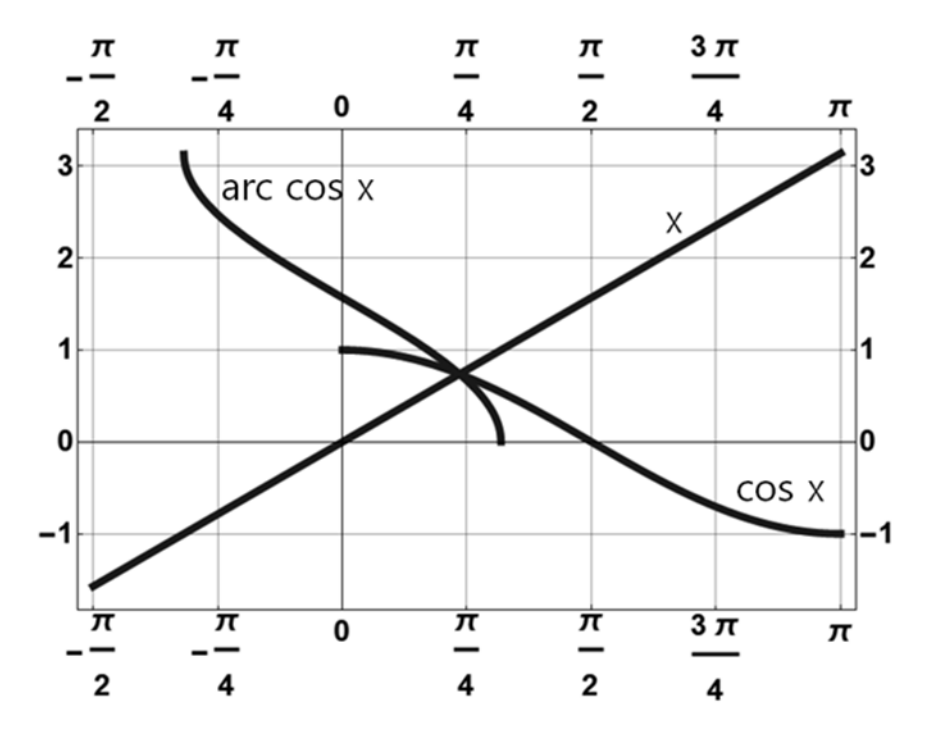


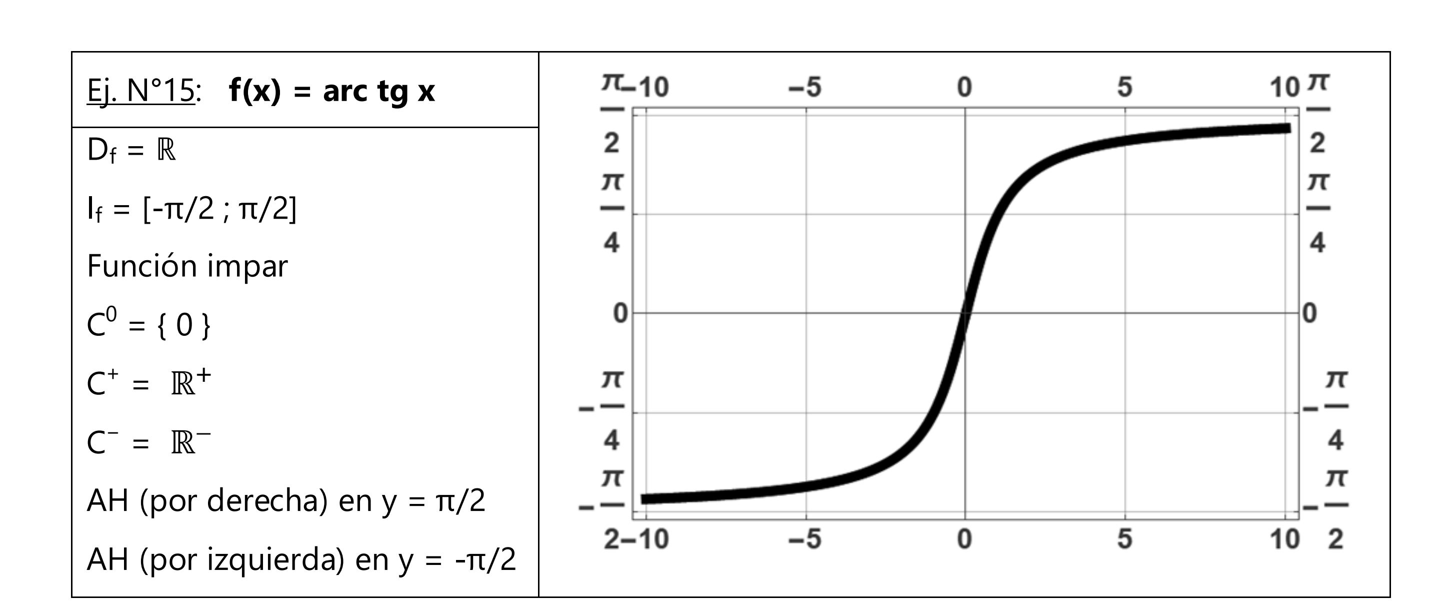
Ej. N°14: **f(x) = arc cos x**	
D_f = [-1 ; 1]	
I_f = [0; π]	
Función impar	
C^0 = { 1 }	
C^+ = [-1 ; 1)	
C^- = ∅	
Máximo en x = -1	
Mínimo en x = 1	

Tomando el tramo biyectivo lo más grande posible de cos x:

$$f: [0; \pi] \rightarrow [-1; 1] \;/\; f(x) = cos\ x$$
$$f^{-1}: [-1; 1] \rightarrow [0; \pi] / \; f(x) = arc\ cos\ x$$

Simetría gráfica cos x ↔ arc cos x





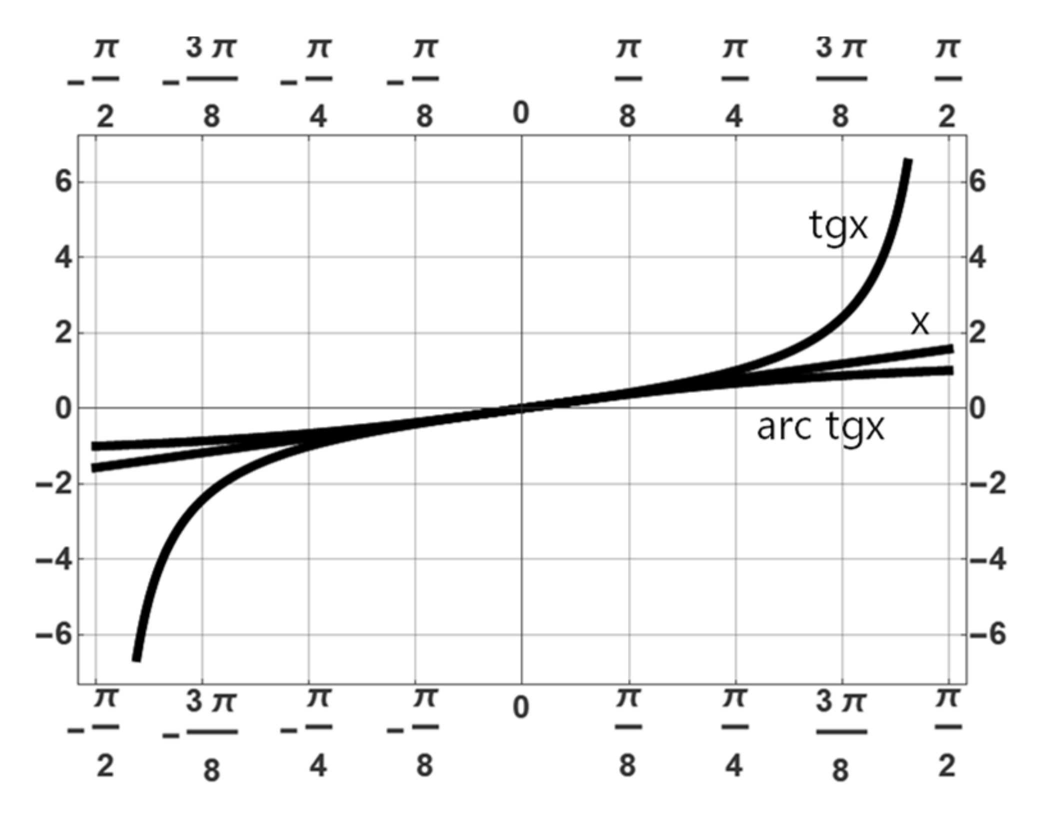
<u>Ej. N°15</u>: **f(x) = arc tg x**	
$D_f = \mathbb{R}$ $I_f = [-\pi/2 \,;\, \pi/2]$ Función impar $C^0 = \{ 0 \}$ $C^+ = \mathbb{R}^+$ $C^- = \mathbb{R}^-$ AH (por derecha) en $y = \pi/2$ AH (por izquierda) en $y = -\pi/2$	

Tomando el tramo biyectivo lo más grande posible de tg x:

$$f\colon \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = tg\ x$$

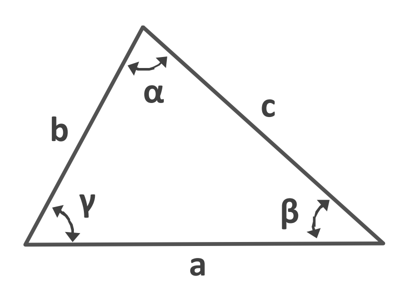
$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] / \, f(x) = arc\ tg\ x$$

Simetría gráfica tg x ↔ arc tg x



10.9 Teoremas del seno y del coseno

En todo triángulo:



Teorema del seno

$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma}$$

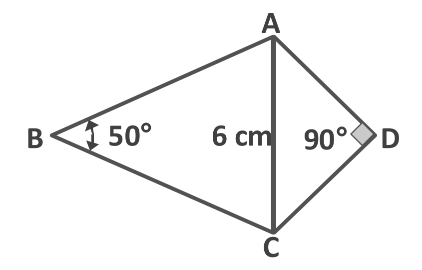
Teorema del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b\ c\ cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ a\ c\ cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a\ b\ cos\gamma$$

10.10 Ejemplos resueltos de geometría con trigonometría

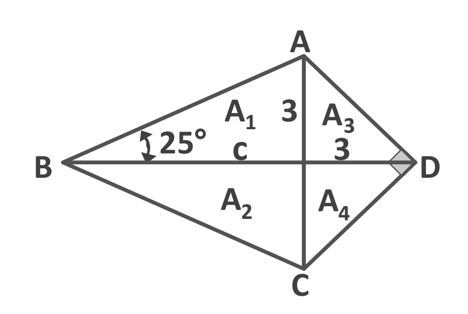
Ej. N°16: *[P2.T1.ej1.24.03] En el romboide ABCD de la figura, la diagonal AC mide 6 cm, y los ángulos ABC y ADC miden 50° y 90° respectivamente.*

Hallar el área del romboide.



Para este problema es necesario saber funciones trigonométricas, y área del romboide (o crearla mediante suma de áreas de triángulos).

Para manejarnos, daremos nombres a lados y áreas:



$$\frac{3}{c} = tg\ 25° \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{tg\ 25°} = 6{,}434$$

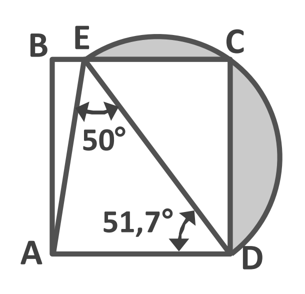
Y como tenemos dos pares de áreas iguales:

$$A_{total} = 2\ A_1 + 2\ A_3$$

$$A_{total} = 2\frac{3c}{2} + 2\ \frac{3\ .\ 3}{2} = 3c + 9$$

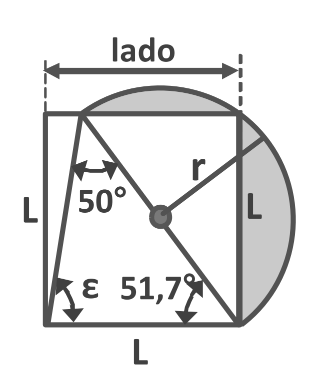
Y dado el valor hallado de c; resulta A = 3 . 6,434 + 9 = 28,3 cm^2

Ej. N°17: *[P2.T3.ej2.24.03] Sobre el lado BC del cuadrado ABCD, se marca un punto E de forma tal que el ángulo AED es de 50° y el ángulo EDA es 51,7° como se observa en la figura. Con centro en el punto medio del segmento ED, se traza una semicircunferencia. Sabiendo que el área del cuadrado es 20,25 cm^2, hallar el área de la zona sombreada.*



Para este problema es necesario saber teorema del seno, y cálculo de áreas.

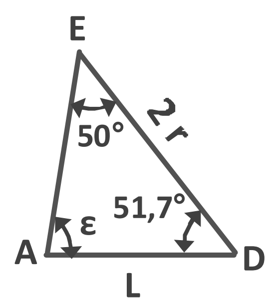
Para manejarnos, daremos nombres a los lados y ángulos:



El lado L del cuadrado es: $L = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$

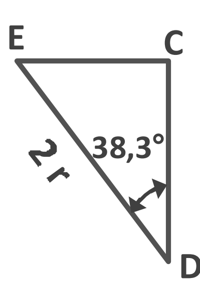
El ángulo ε es: ε = 180º – 50º – 51,7º = 78,3º

Podemos hallar el radio a través del triángulo AED y el teorema del seno:



$$\frac{2\,r}{sen\;78{,}3°} = \frac{L}{sen\;50°} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{L}{2}\frac{sen\;78{,}3°}{sen\;50°} = 2{,}876$$

Ahora podemos hallar el lado $\overline{EC}$ con el triángulo ECD y la función seno:

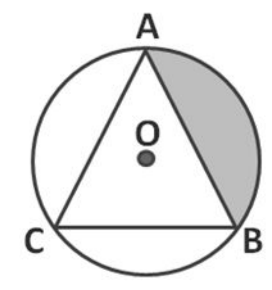


$$sen\;38{,}3° = \frac{\overline{EC}}{2\,r} \quad \Rightarrow \quad \overline{EC} = 2r\;sen\;38{,}3° = 3{,}565$$

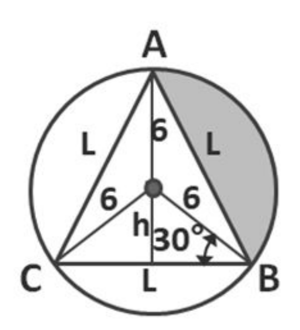
Ya podemos hallar el área de la zona sombreada:

$$A_{somb} = A_{semicírc} - A_{triángECD} = \frac{\pi\,r^2}{2} - \frac{\overline{EC}.L}{2} = 4{,}971\;cm^2$$

Ej. N°18: *[F.ej5.24.03] El triángulo equilátero ABC está inscripto en la circunferencia de centro O y radio 6 cm. Calcular el área de la zona sombreada.*



Para este problema es necesario saber área del círculo y del triángulo, y funciones trigonométricas seno y coseno. Redibujamos para ayudar al análisis:



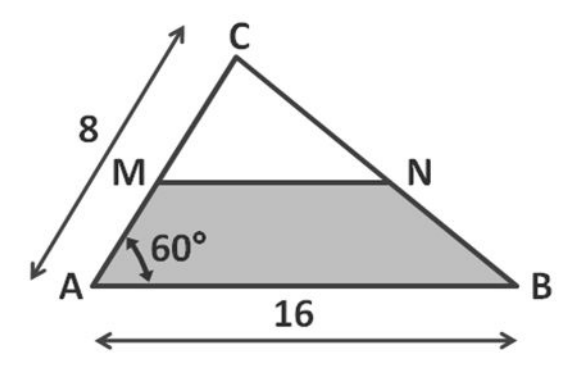
$$cos\ 30° = \frac{L/2}{6} = \frac{L}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{L}{12} \Rightarrow L = 6\sqrt{3}$$

$$sen\ 30° = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 3$$

$$A_{\Delta} = \frac{L\,(6+h)}{2} = \frac{6\sqrt{3}(6+3)}{2} = 27\sqrt{3}$$

$$A_{somb} = \frac{\pi\, r^2 - A_{\Delta}}{3} = \frac{\pi\,.36 - 27\sqrt{3}}{3} = 12\pi - 9\sqrt{3}$$

Ej. N°19: *[LPE-175] Los puntos M y N son puntos medios de los lados del triángulo escaleno ABC. Sabiendo que la longitud del lado MN es la mitad del lado paralelo AB, hallar el perímetro del trapecio sombreado AMNB.*



Es necesario para esto, saber teorema del coseno, y cálculo de áreas.

Por teorema del coseno en el triángulo ABC, podemos hallar el lado CB:

$$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\,\overline{AC}\,cos\ 60°$$

$$\overline{CB}^2 = 16^2 + 8^2 - 2\,.\,16\,.\,8\,.\,1/2$$

Por lo tanto $\overline{CB} = 8\sqrt{3}$ luego el perímetro es:

P= 16 + 4 + 8 + $4\sqrt{3}$ = 34,93

10.11 Problemas propuestos de geometría con trigonometría

Saber todo lo anterior: perímetro, área y volumen. Conocer las fórmulas de la geometría básica, qué es un polígono, un triángulo, circunferencia y círculo. Teorema de Pitágoras, resolución de ecuaciones. Saber teorema del seno y teorema del coseno.

10.140) El hilo de un barrilete que está en alto, se encuentra tenso, y forma un ángulo de 54° 20′ con la horizontal. Hallar la altura del barrilete con respecto al suelo,

si el hilo mide 85 m y el operador sostiene el mismo desde 1,5 m del suelo.

R : 70,6 m LT-TP6-p2

10.141) Desde dos departamentos ubicados en el séptimo y cuarto piso del edificio, que están distantes 9m (en altura) entre sí, se observa que los ángulos de depresión de un objeto situado en la acera, son de 60° y 45° respectivamente. Calcular: a) la distancia entre la base del edificio y el objeto
b) la altura hasta el punto de observación en el séptimo piso

R : a) $\frac{9}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$ b) $\frac{9}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$ LT-TP6-p8

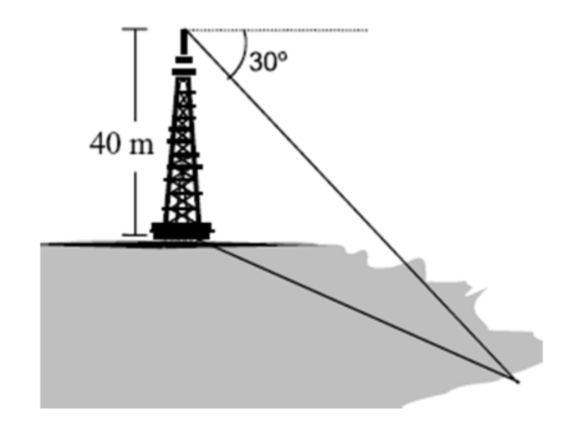
10.142) La sombra de una persona cuya altura es 1,80 m, producida por un foco de alumbrado, es inicialmente de 3,60 m. Luego, la persona se para justo en el lugar donde terminaba su sombra anterior, comprobando que, ahora, ésta mide 4 m. Hallar: (a) la altura a la que se encuentra el foco de luz, (b) la distancia que había inicialmente, desde el pie del foco hasta la persona

R : a) $18\ m$ b) $32{,}4\ m$ LT-TP6-p9

10.143) Desde la azotea de un edificio y desde una ventana situada 9m debajo, se observa que los ángulos de depresión de un objeto situado en el piso, son 45° y 30° respectivamente. Determinar la distancia entre la base del edificio y el objeto, y la altura del edificio.

R : d = h = $\frac{9}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$ LT-TP6-p10

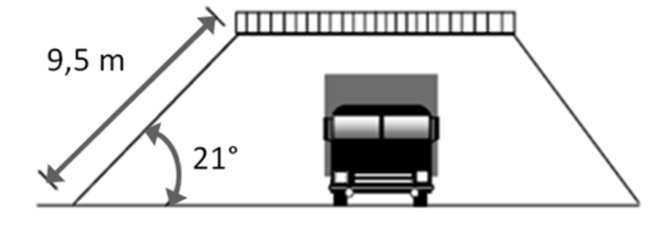
10.144) Una torre de 40m de altura, está situada en la orilla de un lago. Desde la punta de la torre, el ángulo de depresión de un objeto que está en la orilla opuesta, es de 30°. ¿Qué anchura tiene el lago?



R : 69,28 m

LT-TP6-p11

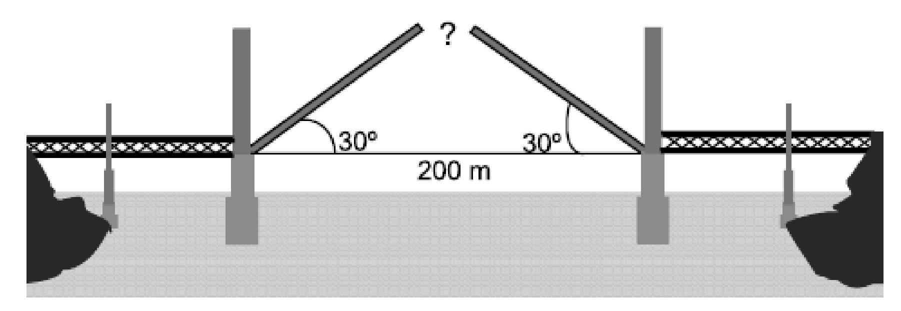
10.145) El ángulo de elevación de una rampa de 9,5m de ascenso a un puente sobre una avenida es de 21°. Determinar la altura máxima que puede tener un camión, para poder pasar por debajo del puente.



R : 3,4 m LT-TP6-p12

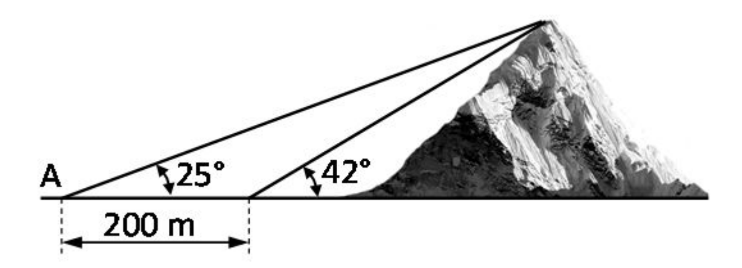
10.146) Un puente sobre un río, tiene 200 m de longitud. Las dos secciones del puente,

rotan hacia arriba, formando un ángulo de 30°, para dar paso a los barcos. Un motociclista quiere saltar de una sección a la otra, y sabe que con su moto puede dar saltos de hasta 20 m. ¿Podrá saltar de un lado al otro, sin peligro?



R : No, la separación entre las dos secciones es de 26,79 m LT-TP6-p13

10.147) Según la imagen de una montaña:



Un topógrafo determina que desde el punto A en el suelo, el ángulo de elevación hasta la cima de la montaña es 25°. Cuando se corre 200 m más cerca de la base de la montaña, el ángulo de elevación pasa a ser de 42°.

¿Cuál es la altura de la montaña?

R : 193,4 m LT-TP6-14

10.148) Una escalera se apoya en una pared vertical, formando un ángulo θ con la horizontal, y su punto más alto está a $4\sqrt{3}$ m de altura, respecto al suelo. Cuando el ángulo disminuye 15°, el punto más alto de la escalera queda a $2\sqrt{2}$ m de altura. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

R : 16,46 m LT-TP6-p15

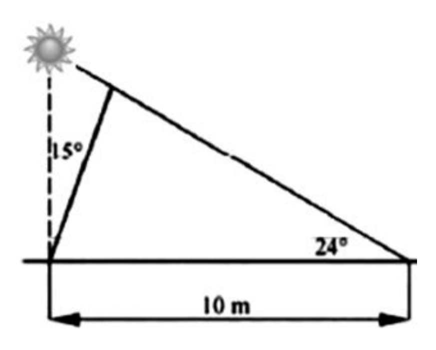
10.149) Un triángulo tiene un área de 16 cm^2. Si dos de sus lados miden 5 cm y 7 cm; determinar el ángulo que forman dichos lados entre sí.

R : 66° 6′ ; 113° 53′ LT-TP6-p17

10.150) Dos observadores situados en los puntos A y B, a 110 m de separación entre ellos, están en la orilla de un río, mirando una torre que está en la orilla opuesta, en el punto C. Medidos los ángulos CAB y CBA, resultaron 43° y 57° respectivamente. ¿A qué distancia está el primer observador (A) de la torre (C)?

R : 93,7 m LT-TP6-p19

10.151) Un poste telegráfico está inclinado. Su ángulo frente a la vertical del Sol es de 15°. El poste produce una sombra de 10 m de largo, cuando el ángulo de elevación del Sol es de 24°. Hallar la longitud del poste.

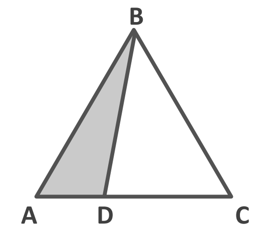


R : 4,1 m LT-TP6-p20

10.152) Los lados de un triángulo miden 5 cm, 8 cm, y 12 cm. Hallar los tres ángulos interiores del triángulo.

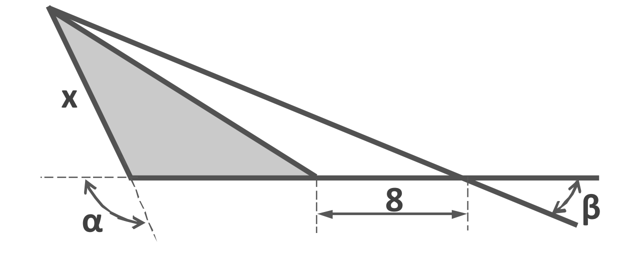
R : 18° , 29° , 133° LT-TP6-p22

10.153) Calcular la longitud de un lado del triángulo equilátero ABC, y el área del triángulo sombreado ABD, sabiendo que el ángulo de vértice D (obtuso) mide 105°, y los segmentos miden DB=$\sqrt{24}$ m y DC = 4 m



R : lado BC = 5,46 m A_{ABD} = 3,45 m^2 P2.T701.1703

10.154) Dos ángulos interiores del triángulo escaleno externo son α=138° y β=19°.



Determinar:

a) Longitud del lado x
b) Perímetro del triángulo isósceles sombreado
c) Área del triángulo isósceles sombreado, expresada en parte porcentual del triángulo escaleno externo

R : a) x = 40 b) perímetro = 155 c) 83 % P2.T1.1712

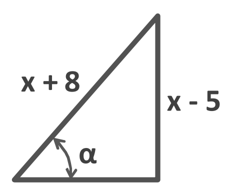
10.155) Desde el extremo superior C de un muro, se tienden dos tensores, uno al suelo (S); otro menor de 19m hasta la cumbre D de una construcción de 21m de altura. La distancia del punto A hasta el pie de uno de los tensores S en el suelo es 28m. El ángulo α tiene cos α = 6/7.

Determinar:

a) Longitud t del tensor $\overline{CS}$ teniendo en cuenta que t < $\overline{AS}$
b) Altura $\overline{CB}$ del muro

R : t = 24 m $\overline{CB}$ ≅ 22,23 m F.T2.1612

10.156) Calcular el perímetro del triángulo rectángulo dibujado, si el ángulo interior señalado es α = 30°, y la hipotenusa y un cateto, miden la longitud expresada.



R : perímetro ≅ 61,52 P2.T5.1303

10.157) Sea un triángulo ABC tal que las longitudes de sus lados son:

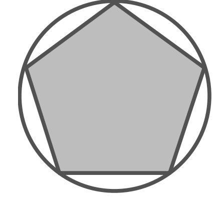
$\overline{AB}$ = x + 9 $\overline{BC}$ = x $\overline{CA}$ = x + 7

Y el coseno del ángulo interior de vértice B es $\frac{x-1}{2x}$

Determinar la longitud de c/u de los lados del triángulo

R : $\overline{AB}$ = 77/4 $\overline{BC}$ = 41/4 $\overline{CA}$ = 69/4 P2.T1.1203

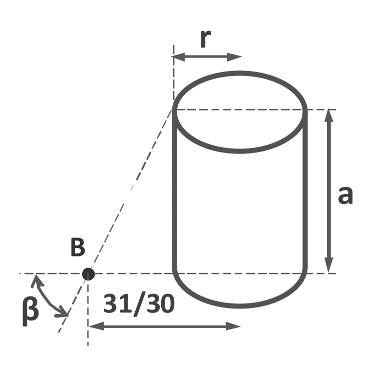
10.158) Sea un pentágono regular inscripto en una circunferencia que tiene una longitud igual a 148 π cm.



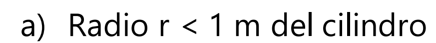
Calcular el perímetro del pentágono.

R : perímetro ≅ 435 cm P2.T1.1403

10.159) El volumen del cilindro es 1/5 π m^3. También se sabe que el ángulo β, tiene tg β = 6, y que la distancia del centro de la base al punto B es 31/30 m.



Hallar:



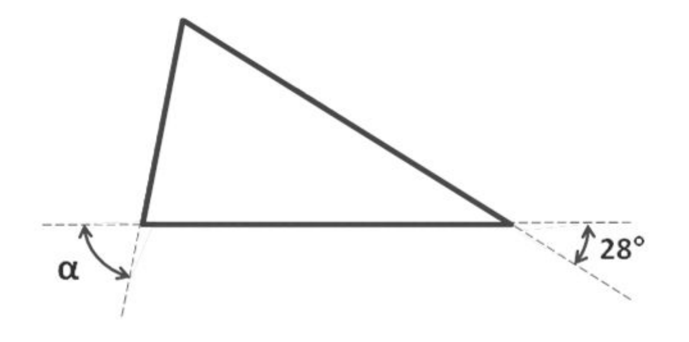
a) Radio r < 1 m del cilindro
b) Área lateral del cilindro (sin las tapas)

R : a) r = 1/5 m b) $A_{lateral}$ = 2 π m^2 P2.T3.1111

10.160) Calcular el perímetro del triángulo tal que el lado menor mide 18 cm, sabiendo que para el ángulo agudo α:

sen α = k – 3/5

cosec α = 16/13 k



R : perímetro ≅ 78,6 cm P2.T1.1203

10.161) Un barco B pide socorro, recibiéndose las señales en dos estaciones de radio, P y Q, que distan 50 km entre sí. Desde cada estación, se miden los ángulos $\widehat{BPQ}$ y $\widehat{BQP}$, que resultan ser 43° y 53° respectivamente. ¿A qué distancia de cada estación de radio se encuentra el barco?

R : $\overline{BP}$ = 40,15 km $\overline{BQ}$ = 34,29 km LPE-143

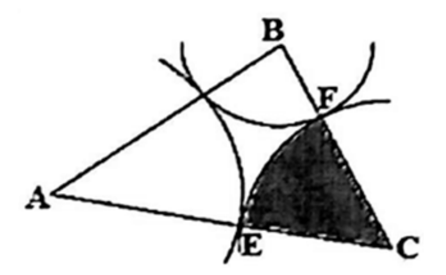
10.162) Dos barcos P y Q se alejan del puerto O. El barco P viaja hacia el norte en trayectoria rectilínea, a una velocidad constante de 25 km/h. El barco Q avanza en trayectoria rectilínea, en una dirección a 120° de la dirección de desplazamiento de P, con una velocidad constante de 30 km/h. Determinar la distancia entre P y Q, cuatro horas después de haber partido, y el ángulo $\widehat{OQP}$ en ese instante.

R : $\overline{PQ}$ = 190,79 km $\widehat{OQP}$ ≅ 27° LPE-238

10.163) Hallar los radios de las tres circunferencias tangentes, que tienen centro en los vértices del triángulo cuyos lados miden:

$\overline{AB} = 87\,m$ $\overline{BC} = 72\,m$ $\overline{CA} = 101\,m$

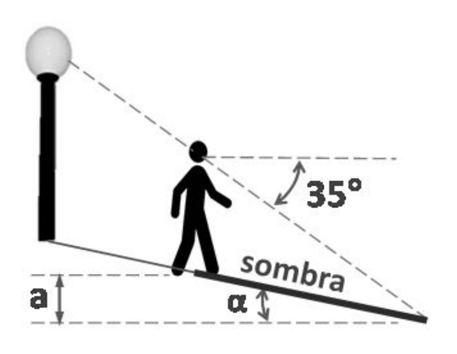
Luego, hallar el área del sector circular sombreado



P2.T149.1803

R : 43 cm, 29 cm y 58 cm Área = 927,7 cm^2

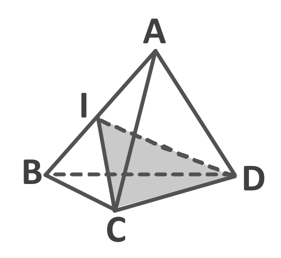
10.164) Un hombre de altura 178 cm, se para en un declive hacia abajo, con un ángulo constante α. Un poste vertical de luz, situado detrás de él, proyecta una sombra de 420 cm, que se indica en la figura. El ángulo de depresión desde la mayor altura del hombre hasta la punta de su sombra, es de 35°. Hallar el ángulo α, y la altura a.



R : α = 14° 41′ 10′′ a = 106,5 cm P2.T5.1011

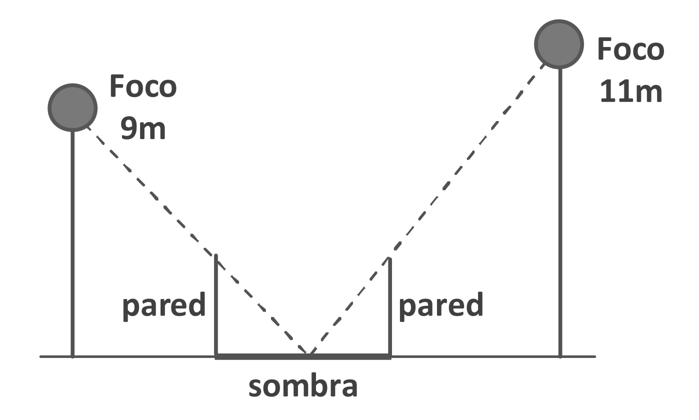
10.165) El área total del tetraedro regular de la figura es $100\sqrt{3}$ cm^2. El punto I, es punto medio de la arista $\overline{AB}$. Determinar:

a) Perímetro del triángulo CDI
b) Área del mismo triángulo



R : Perímetro = 27,32 cm Área = 35,35 cm^2 P2.T1.1102

10.166) Dos focos de alumbrado están a 11 m y 9 m respectivamente del suelo. A 5 m de la base del foco más alto, y a 4 m del foco más bajo, se encuentran dos paredes verticales de igual altura h, de modo que ambas paredes están ubicadas entre los focos. Determinar la altura de las paredes (iguales), sabiendo que las sombras proyectadas por cada una de ellas son de igual longitud.

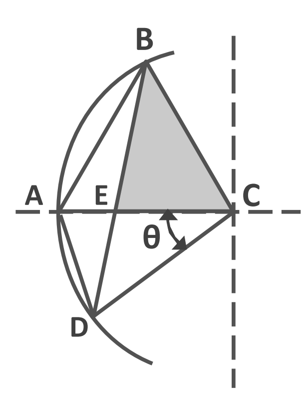


R : $h_{PARED} = 1$ m LPE-361

10.167) C es el centro de una circunferencia de radio AC. El área del triángulo equilátero ABC de 529 $\sqrt{3}$ cm^2. El ángulo θ, del triángulo ACD, es de 38°

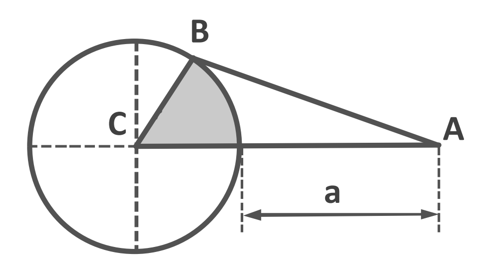
a) Hallar la longitud del segmento BD.
b) Determinar el área del triángulo BEC sombreado

R : a) BD ≅ 69,43 cm b) Área$_{BEC}$ ≅ 612,3 cm^2



F.T1.190328 / mod.gp

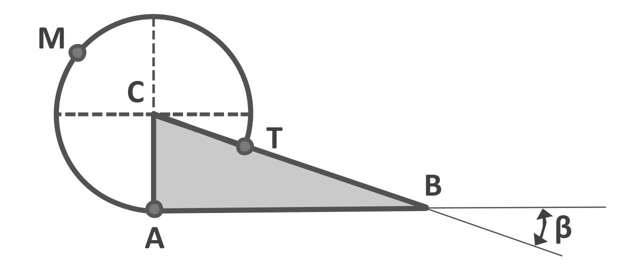
10.168) El sector circular (sombreado) tiene un área de 2656 cm^2, la circunferencia (de centro C) tiene un diámetro de 120 cm, y la longitud a del segmento indicado, es 3/2 del radio de la circunferencia. Determinar el perímetro del triángulo ABC.



R : Perímetro$_{ABC}$ ≅ 366,16 cm

LPE-388

10.169) Calcular el área del triángulo rectángulo ABC (sombreado), si se sabe que la longitud del arco de circunferencia AMT (no incluído ni superpuesto con el triángulo) es de 32π cm, y el ángulo β es de 18°.



R : Área$_{ABC}$ ≅ 615,5 cm^2

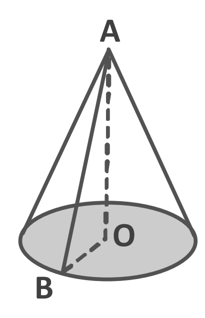
F.T1.191213 también LPE-489 / mod.gp

10.170) El área de la base del cono es 289 π cm^2. El ángulo ABO (de vértice B) es 56°.

Determinar la altura del cono

R : h = 25,2 cm

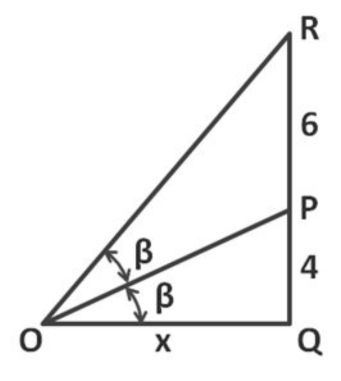
Rec.T2R.1111



10.171) En la siguiente figura, hallar el valor de x.

R : $x = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

F.T4.Ej4b.2203



11. VECTORES PARA MAGNITUDES FÍSICAS

TEMA EXPLICADO EN LOS VIDEOS:

2.3 Vectores **(parte 1)**



https://youtu.be/UCFN9wVsNKE

2.3 Vectores **(parte 2)**



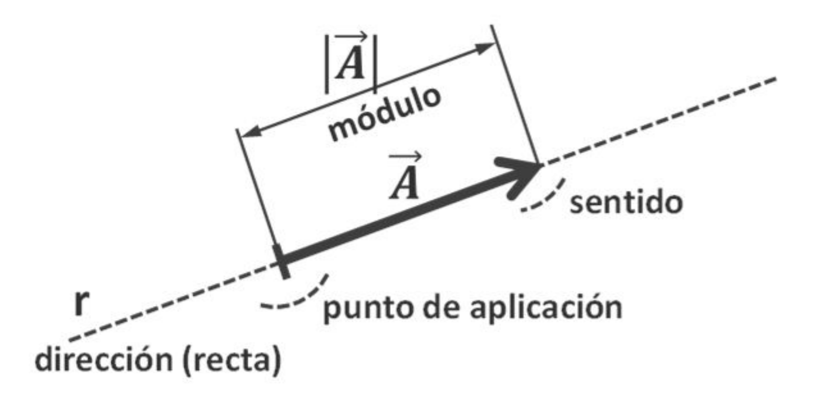
https://youtu.be/0KwtJBFiG54

11.1 Fundamentación

Son **magnitudes escalares**, aquellas magnitudes que se representan sólo con un número y una unidad de medida. Algunos ejemplos de magnitudes escalares son: *masa, volumen, capacidad, presión, temperatura*. Otras magnitudes, llamadas **magnitudes vectoriales**, necesitan módulo, dirección y sentido. No es lo mismo avanzar a 100 km/h en una recta horizontal, que en una recta vertical, y no es lo mismo, aún sobre la misma recta, ir hacia el sur, que ir hacia el norte (o izquierda o derecha). Algunos ejemplos de magnitudes vectoriales son: *velocidad, aceleración, fuerza, posición, cantidad de movimiento*. Los vectores que vamos a usar, son los que representan magnitudes vectoriales en tres dimensiones. A continuación, la definición matemática.

11.2 Definición en el espacio tridimensional

Los vectores[7] (en física) representan magnitudes vectoriales que tienen *sentido físico*, y sentido físico significa las tres dimensiones del universo físico.



[7] Lista de videos (10) sobre vectores en: https://www.youtube.com/playlist?list=PLSCbh4WAFRcsXI3UNbt2EMxsuDD1cZ8GU

Los vectores dentro del espacio físico tridimensional se caracterizan por tener:

1. MÓDULO ó NORMA: número real positivo $|\vec{A}|$ ó también $\|\vec{A}\|$
2. DIRECCIÓN: recta en el espacio, sobre la cual está ubicado el vector
3. SENTIDO: sentido del vector sobre la recta (la flecha)

Dos vectores especiales, son:

Versor: un versor es un vector que tiene *módulo unitario*, por ej. si encontramos que $|\vec{A}| = 1$ entonces $\vec{A}$ es un versor, y se simboliza de distintas maneras: $\breve{A}$; $\hat{A}$.

Vector nulo: es un vector que tiene *módulo cero* y se simboliza $\vec{0}$. Se usa cuando queda (o debe quedar) como resultado nulo de una operación de vectores, por ejemplo si restamos $\vec{A} - \vec{A} = \vec{0}$.

11.3 Operaciones gráficas con vectores

11.3.1 Suma / resta

Dos vectores que pertenecen a la **misma recta** (llamados colineales o axiales) se suman de una manera muy intuitiva, de la siguiente manera:

Suma: $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{a} + \vec{b}$

Suma: $\vec{c}$ $\vec{d}$ $\vec{c} + \vec{d}$

Resta: $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{a} - \vec{b}$

$-\vec{b}$

vector opuesto

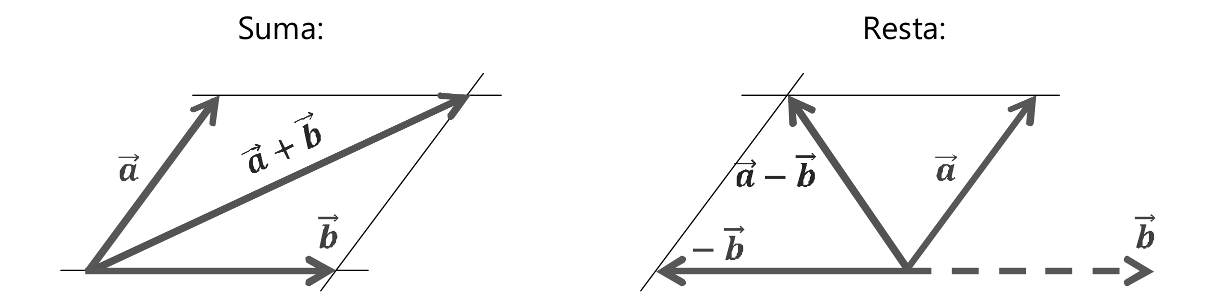
En la resta tomamos el vector sustraendo, y lo invertimos para formar su **vector opuesto**. Luego, sumamos ese *vector opuesto*, al $\vec{a}$. O sea, la resta se hace sumando:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Si los vectores que queremos sumar están en **distinta recta**, hay dos formas:

Regla del paralelogramo:

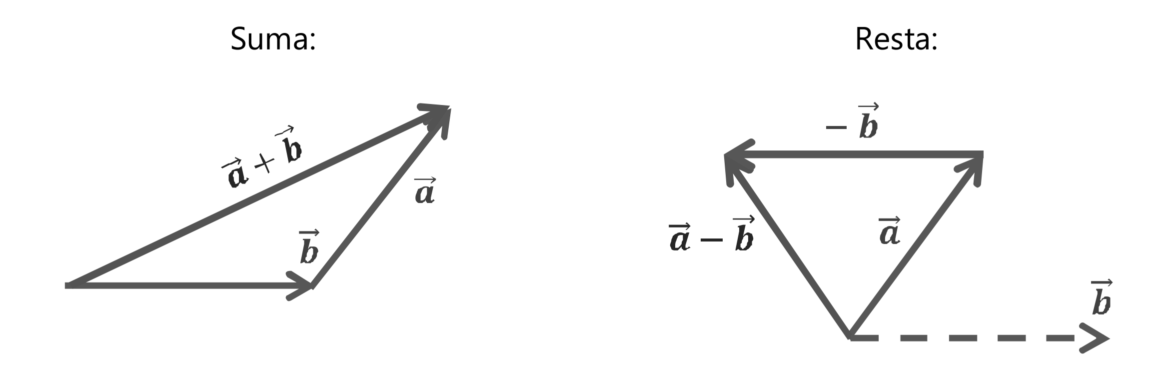
Formando un paralelogramo con las rectas de acción, el vector suma es la diagonal que queda dentro del paralelogramo:



Notar que tanto la suma como la resta, es la suma de dos vectores, la única diferencia es que en la resta, invertimos el sustraendo, y sumamos ese vector, al minuendo.

Regla del triángulo:

Se hace trasladando un vector a continuación del otro. Es mejor que la regla del paralelogramo, cuando hay que hacer varias sumas juntas (varios vectores sumados juntos).

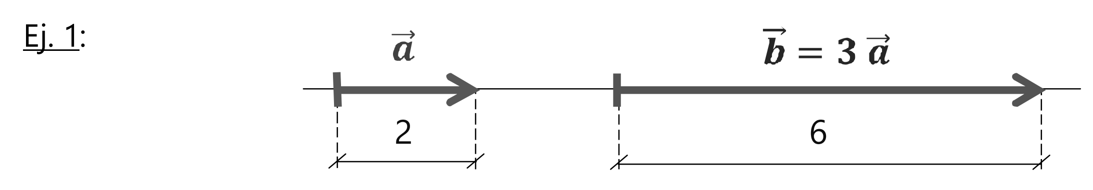


11.3.2 Multiplicación de un escalar por vector

Para restar, creamos el vector opuesto del sustraendo, eso equivale a multiplicar el vector por (-1). Por lo tanto multiplicar por (-1), genera un vector opuesto del mismo módulo. Esto da idea, que multiplicando por un escalar (número real) a un vector, puede ocurrir lo siguiente, una de dos:

- **escalar positivo**: sólo le cambia el módulo, manteniendo el sentido del vector.
- **escalar negativo**: le cambia el módulo, y le invierte el sentido.

Ej. 1:



multiplicar por 3, triplica el módulo y no invierte

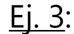
Ej. 2:

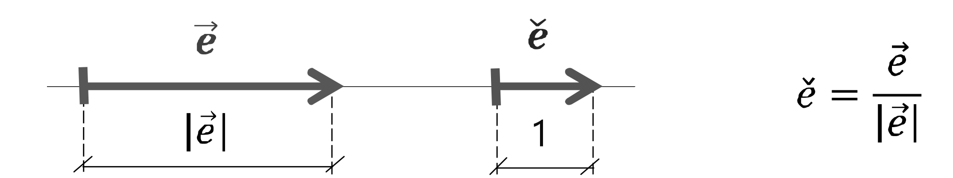
$\vec{c}$ $\qquad$ $\vec{d} = -\frac{1}{2}\,\vec{c}$

5 $\qquad$ 5/2

multiplicar por (-1/2), invierte y el módulo es la mitad

¿Cómo haríamos para, dado un vector conocido, "fabricar" un **versor (vector que tiene módulo unitario)** del mismo sentido? Naturalmente, lo hacemos dividiendo al vector por su módulo:


Ej. 3:



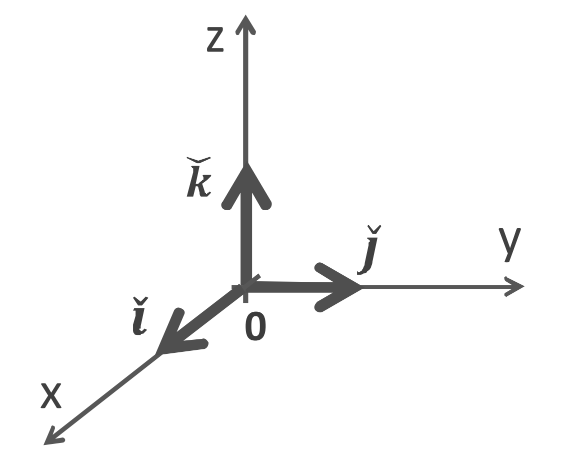
$$\breve{e} = \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}$$

Y tenemos la primera operación algebraica. El próximo paso es hacer más operaciones en forma algebraica, lo que evitará dibujos, escalas, ángulos. El puente a dichas operaciones son los:

11.1 Versores canónicos o fundamentales terna derecha

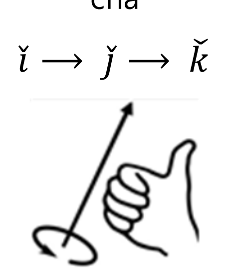
Se demuestra (lo dejamos para cursos superiores) que *tres versores perpendiculares entre sí*, en el espacio tridimensional, permiten expresar cualquier otro vector en función de ellos, usando operaciones suma y producto de escalar por vector. A estos versores los llamamos *versores canónicos o fundamentales*, y sus características son:

Nombre	Características
$\breve{\imath}$	sobre el eje x, en el sentido x > 0
$\breve{\jmath}$	sobre el eje y, en el sentido y > 0
$\breve{k}$	sobre el eje z, en el sentido z > 0

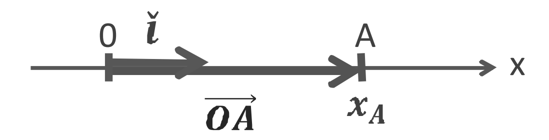


Sistema de coordenadas cartesianas XYZ terna derecha

$\breve{\imath} \longrightarrow \breve{\jmath} \longrightarrow \breve{k}$



Si tomamos el *eje x*, y colocando un punto A sobre él, de coordenadas x_A:



Importante:

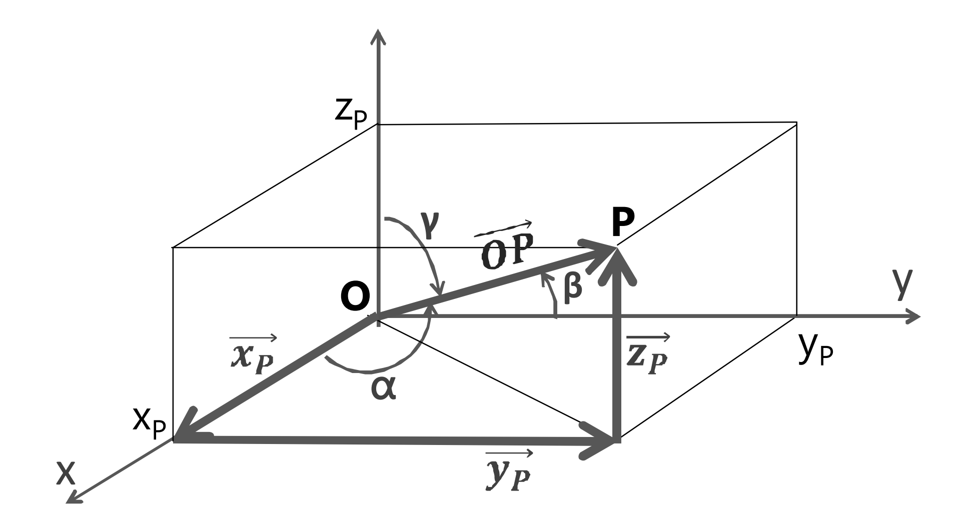
1. "O" es un punto que se llama *origen de coordenadas*. Es donde los tres ejes

coordenados tienen x = y = z = 0.

2. "A" es un punto, y su coordenada es x_A.
3. El vector $\overrightarrow{OA}$ es un vector entre dos puntos, va desde el punto O al A, es decir su punto inicial en el espacio es el origen de coordenadas (en este ejemplo), y su punto extremo es el punto A.
4. En este ejemplo, el vector $\overrightarrow{OA}$ está completamente ubicado sobre el eje x, por lo tanto podemos expresar dicho vector con la operación ya vista de multiplicación escalar por versor: $\overrightarrow{OA} = x_A\ \breve{\imath}$

11.2 Posición de un punto en el espacio

Lo mismo podemos hacer con cualquier punto P en el espacio tridimensional, usando los tres versores canónicos para determinar el vector $\overrightarrow{OP}$.



La representación del vector es la suma de los tres vectores graficados:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{x_P} + \overrightarrow{y_P} + \overrightarrow{z_P} = x_P\ \breve{\imath} + y_P\ \breve{\jmath} + z_P\ \breve{k}$$

α, β, γ se llaman ÁNGULOS DIRECTORES, son ángulos que, combinados, nos dan la *orientación del vector (dirección y sentido)*. Los tres ángulos deben tomarse como ángulos normales o normalizados, es decir van desde el sentido positivo de cada eje, girando en sentido anti horario, hasta el vector.

11.3 Forma algebraica de expresar vectores

Un vector se puede expresar de <u>tres formas</u> distintas en el espacio físico $\mathbb{R}^3$. Ellas son:

1. FORMA CANÓNICA: sumas de multiplicaciones de escalar por versor canónico, como se ha visto más arriba.

$$\vec{A} = A_x\ \breve{\imath}\ + A_y\ \breve{\jmath}\ + A_z\ \breve{k}$$

2. FORMA CARTESIANA: terna ordenada de sus <u>componentes</u> cartesianas en cada eje. Sólo colocamos las componentes, siempre en forma ordenada.

$$\vec{A} = (A_x\ ;\ A_y\ ;\ A_z)$$

3. FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA: el módulo y sus tres ángulos directores.

Explicamos esta última forma de expresar un vector. Se trata de informar módulo y ángulos, lo que podemos lograr por trigonometría básica haciendo lo siguiente:

$$A_x = |\vec{A}|\ cos\ \alpha \qquad A_y = |\vec{A}|\ cos\ \beta \qquad A_z = |\vec{A}|\ cos\ \gamma$$

Por lo tanto, la forma canónica puede también puede escribirse:

$$\vec{A}\ = |\vec{A}|\ cos\ \alpha\ \breve{\imath} + |\vec{A}|\ cos\ \beta\ \breve{\jmath} + |\vec{A}|\ cos\ \gamma\ \breve{k}$$

Y entonces tenemos expresado el vector con módulo y ángulos, lo que en la forma polar o trigonométrica se expresa:

$$\vec{A}\ = |\vec{A}|\ (\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$$

Si vamos a trabajar en el plano XY, alcanza con un único ángulo, escribimos entonces:

$$\vec{A}\ = (|\vec{A}|\ ; \alpha\ )$$

11.4 Expresiones de un vector, módulo, versor asociado

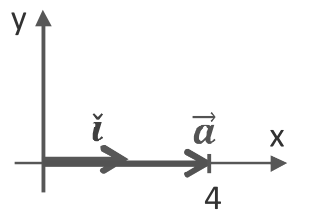
Expresar los siguientes vectores en las tres formas conocidas en $\mathbb{R}^2$ (plano XY), también obtener su módulo y versor asociado. Graficar (en los resultados, el versor está fuera de escala).

11.1) $\vec{a}\ = (4\ ;\ 0)$ gp

R:

$\vec{a} = 4\ \breve{\imath} = (4\ ; 0°)$

$|\vec{a}| = 4 \qquad \breve{a} = \breve{\imath}$



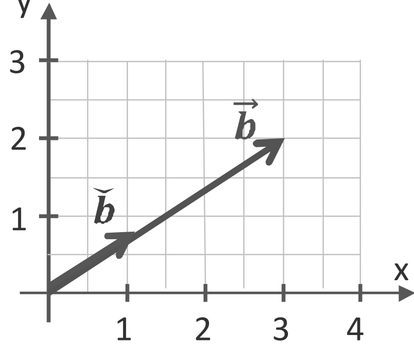
11.2) $\vec{b}\ = (3\ ;\ 2)$ gp

R:

$\vec{b} = 3\ \breve{\imath} + 2\ \breve{\jmath} = (\sqrt{13}\ ; 33{,}7°)$

$|\vec{b}| = \sqrt{13}$

$\breve{b} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}} ; \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$



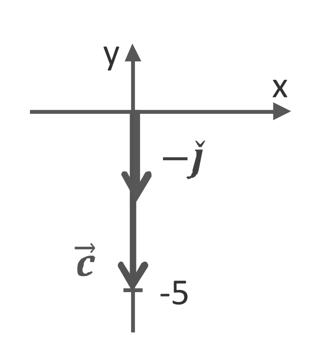
11.3) $\vec{c}\ = (0\ , -5)$ gp

R:

$\vec{c} = -5\,\check{j} = (5\,;270°)$

$|\vec{c}| = 5$

$\check{c} = -\check{j}$



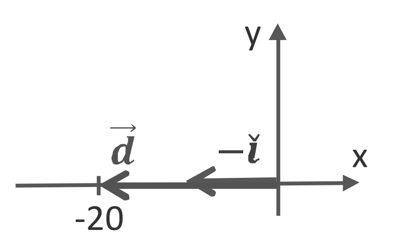
11.4) $\vec{d} = (20\,,180°)$ gp

R:

$\vec{d} = -20\,\check{i} = (20\,;180°)$

$|\vec{d}| = 20$

$\check{d} = -\check{i}$



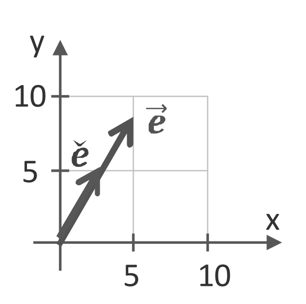
11.5) $\vec{e} = (10\,,60°)$ gp

R:

$\vec{e} = 5\,\check{i} + 8{,}7\,\check{j} = (5\,;8{,}7)$

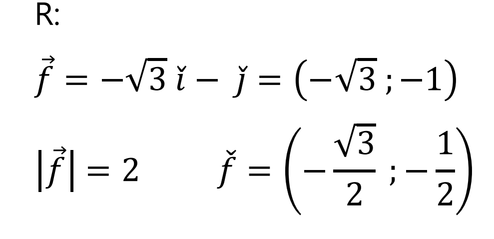
$|\vec{e}| = 10$

$\check{e} = 0{,}5\,\check{i} + 0{,}87\,\check{j}$



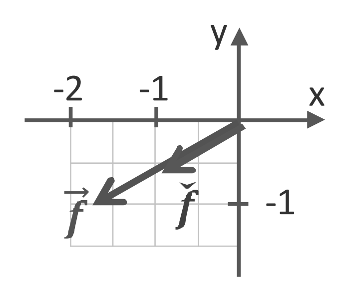
11.6) $\vec{f} = (2\,,210°)$ gp

R:



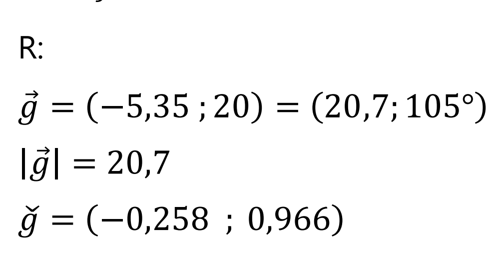
$\vec{f} = -\sqrt{3}\,\check{i} - \check{j} = \left(-\sqrt{3}\,;-1\right)$

$\left|\vec{f}\right| = 2 \qquad \check{f} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$



11.7) $\vec{g} = -5{,}35\,\check{i} + 20\,\check{j}$ gp

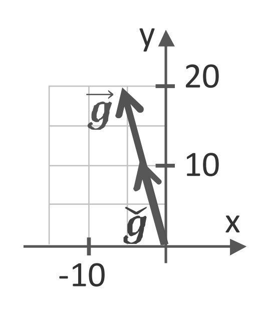
R:



$\vec{g} = (-5{,}35\,;20) = (20{,}7;105°)$

$|\vec{g}| = 20{,}7$

$\check{g} = (-0{,}258\,;\,0{,}966)$

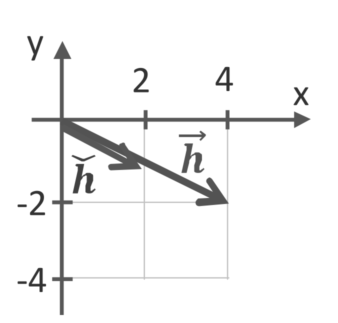


11.8) $\vec{h} = 4\,\breve{\imath} - 2\,\breve{\jmath}$ gp

R:

$\vec{h} = (4\,; -2) = (2\sqrt{5}; 333°)$

$|\vec{h}| = 2\sqrt{5} \qquad \breve{h} = \frac{2}{\sqrt{5}}\ \breve{\imath} - \frac{1}{\sqrt{5}}\ \breve{\jmath}$

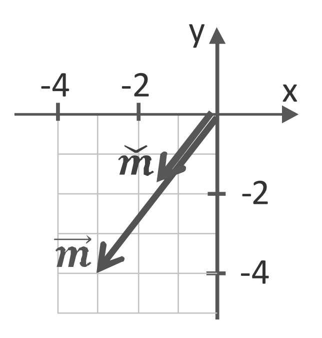


11.9) $\vec{m} = (-3\ ;\ -4)$ gp

R:

$\vec{m} = -3\,\breve{\imath} - 4\,\breve{\jmath} = (5; 233°)$

$|\vec{m}| = 5 \qquad \breve{m} = -\frac{3}{5}\ \breve{\imath} - \frac{4}{5}\ \breve{\jmath}$

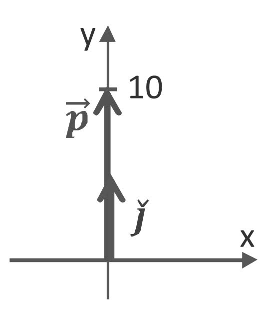


11.10) $\vec{p} = (10\ ;\ 90°)$ gp

R:

$\vec{p} = (0\,; 10) = 10\,\breve{\jmath}$

$|\vec{p}| = 10 \qquad \breve{p} = \breve{\jmath}$



11.5 Dirección, punto final, recta perpendicular

Dado un vector que nace en el origen de coordenadas, nos proponemos hallar su dirección (recta), su punto final, y la recta perpendicular al vector que pase por el origen.

Ej. 4: Para el vector $\vec{v} = (5\ ;\ 3)$ hallar su dirección, punto final y recta normal.

Sabiendo que la recta pasa por el origen, bastará con hallar la pendiente: $m = \frac{v_y}{v_x} = \frac{3}{5}$

Por lo tanto la recta (dirección del vector) será: y = 3/5 x

El punto final del vector es el punto Pf (5 ; 3).

Por condición de perpendicularidad entre rectas: $m_{\perp} = -\frac{1}{m} = -\frac{5}{3}$

Por lo tanto la recta perpendicular es: y = – 5/3 x

Asumiendo que cada uno de los vectores siguientes (mismos del punto 11.4 anterior) nacen en el origen de coordenadas, hallar su dirección, su punto final, y la recta perpendicular al vector que pase por el origen.

11.11) $\vec{a} = (4\ ;\ 0)$ gp R: $dirección: y = 0 \quad A(4\ ;0) \quad r_{\perp}: x = 0$

11.12) $\vec{b} = (3\ ;\ 2)$ gp R: $dirección: y = \frac{2}{3}x \quad B(3\ ;2) \quad r_{\perp}: y = -\frac{3}{2}x$

11.13) $\vec{c} = (0\ ,-5)$ gp R: $dirección: x = 0 \quad C(0\ ;-5) \quad r_{\perp}: y = 0$

11.14) $\vec{d} = (20\ ,180°)$ gp R: $dirección: y = 0 \quad D(-20\ ;0) \quad r_{\perp}: x = 0$

11.15) $\vec{e} = (10\ ,60°)$ gp R: $dirección: y = 1{,}74\ x \quad E(5\ ;8{,}7) \quad r_{\perp}: y = -0{,}575\ x$

11.16) $\vec{f} = (2\ ,210°)$ gp R: $dirección: y = \frac{1}{\sqrt{3}}\ x \quad F\left(-\sqrt{3}\ ;-1\right) \quad r_{\perp}: y = -\sqrt{3}\ x$

11.17) $\vec{g} = -5\ \check{\imath} + 20\ \check{\jmath}$ gp R: $dirección: y = -4\ x \quad G(-5\ ;20) \quad r_{\perp}: y = 1/4\ x$

11.18) $\vec{h} = 4\ \check{\imath} - 2\ \check{\jmath}$ gp R: $dirección: y = -1/2\ x \quad H(4\ ;-2) \quad r_{\perp}: y = 2\ x$

11.19) $\vec{m} = (-3\ ;\ -4)$ gp R: $dirección: y = 4/3\ x \quad M(-3\ ;-4) \quad r_{\perp}: y = -3/4\ x$

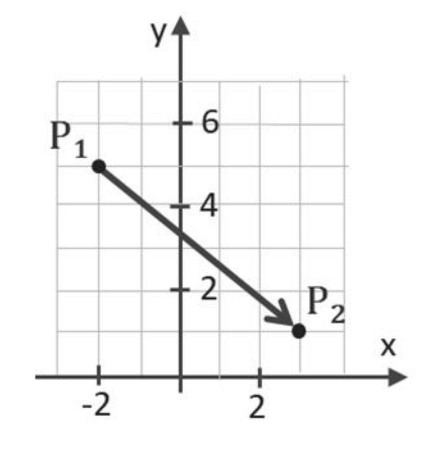
11.20) $\vec{p} = (10\ ;\ 90°)$ gp R: $dirección:\ x = 0 \quad N(0\ ;10) \quad r_{\perp}: y = 0$

11.6 Vectores entre dos puntos

Dados dos puntos conocidos P_1 y P_2, nos proponemos hallar el vector que nace en P_1 y termina en P_2, más la dirección del vector.

Ej. 5: Para los puntos P_1 (-2 ; 5) y P_2 (3 ; 1) hallar el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ y su dirección.

Siempre conviene graficar previamente.



Donde vemos que simplemente restando, tenemos las componentes del vector:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (P_{2x} - P_{1x})\check{\imath} + \left(P_{2y} - P_{1y}\right)\check{\jmath}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (3 - (-2))\check{\imath} + (1 - 5)\check{\jmath}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = 5\ \check{\imath} - 4\ \check{\jmath}$$

La dirección del vector es la recta, y sabemos que, conociendo dos puntos de la recta, tenemos la recta, por ejemplo usando el haz de rectas, hallando la recta que pasa por P_1:

$$m = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}_y}{\overrightarrow{P_1P_2}_x} = -\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad y - 5 = -\frac{4}{5}(x + 2)$$

Usando los puntos (A – N) hallados como resultado de los problemas 11.11 al 11.20 anteriores, hallar los siguientes vectores entre dos puntos, y también hallar sus direcciones.

11.21) $\overrightarrow{AB}$ gp R: $\overrightarrow{AB} = (-1\,;2\,) = -\,\breve{\imath} + 2\,\breve{\jmath}$ $\quad y = -2x + 8$

11.22) $\overrightarrow{DC}$ gp R: $\overrightarrow{DC} = (20\,;-5\,) = 20\,\breve{\imath} - 5\,\breve{\jmath}$ $\quad y = -1/4\,x - 5$

11.23) $\overrightarrow{EG}$ gp R: $\overrightarrow{EG} = (-10\,;11{,}3\,) = -10\,\breve{\imath} + 11{,}3\,\breve{\jmath}$ $\quad y = -1{,}13\,x + 14{,}35$

11.24) $\overrightarrow{AH}$ gp R: $\overrightarrow{AH} = (0\,;-2\,) = -2\,\breve{\jmath}$ $\quad x = 0$

11.25) $\overrightarrow{BD}$ gp R: $\overrightarrow{BD} = (-23\,;-2\,) = -23\,\breve{\imath} - 2\,\breve{\jmath}$ $\quad y = 2/23\,x + 40/23$

11.7 Suma / resta / escalar x vector en forma algebraica

Ej. 6: Para los vectores desde el origen $\vec{a} = (-3\,;2\,)$; $\vec{b} = 11\,\breve{\imath} - 5\,\breve{\jmath}$

Hagamos las siguientes operaciones:

$a)\ \vec{a} + \vec{b}$ $\quad b)\ \vec{a} - 4\,\vec{b}$ $\quad c)\ -2\,\vec{a} + 3\,\vec{b}$

$d)\ \breve{a}$ $\quad e)\ \breve{b}$ $\quad f)\ recta\ de\ \breve{a}$

$g)\ recta\ de\ \breve{b}$ $\quad h)\ ángulo\ de\ \vec{a}$ $\quad i)\ ángulo\ de\ \vec{b}$

Resolución:

$a)\ \vec{a} + \vec{b} = (-3\,;2\,) + (11\,;-5\,) = (8\,;-3)$

ó también: $\vec{a} + \vec{b} = -3\,\breve{\imath} + 2\,\breve{\jmath} + 11\,\breve{\imath} - 5\,\breve{\jmath} = 8\,\breve{\imath} - 3\,\breve{\jmath}$

$b)\ \vec{a} - 4\,\vec{b} = (-3\,;2\,) - 4\,(11\,;-5\,) = (-3\,;2) + (-44\,;20) = (-47\,;22)$

ó también: $\vec{a} - 4\,\vec{b} = -3\,\breve{\imath} + 2\,\breve{\jmath} - 4\,(11\,\breve{\imath} - 5\,\breve{\jmath}) = -47\,\breve{\imath} + 22\,\breve{\jmath}$

$c)\ -2\,\vec{a} + 3\,\vec{b} = -2\,(-3\,;2\,) + 3\,(11\,;-5\,) = (6\,;-4) + (33\,;\ -15) = (39\,;-19)$

ó también: $2\,\vec{a} + 3\,\vec{b} = -2\,(-3\,\breve{\imath} + 2\,\breve{\jmath}) + 3\,(11\,\breve{\imath} - 5\,\breve{\jmath})$

$$d)\ \breve{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(-3\,;2\,)}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}} = \frac{(-3\,;2\,)}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = \left(\frac{-3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

$$e)\ \breve{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(11\,;-5\,)}{\sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2}} = \frac{(11\,;-5\,)}{\sqrt{11^2 + (-5)^2}} = \left(\frac{11}{\sqrt{146}};\frac{-5}{\sqrt{146}}\right)$$

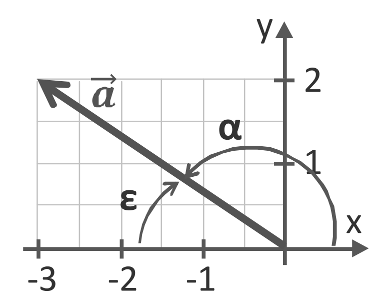
f / g) vamos a suponer ambos vectores nacen en el origen de coordenadas, por lo tanto sólo hará falta calcular la pendiente:

$$\vec{a}:\quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x$$

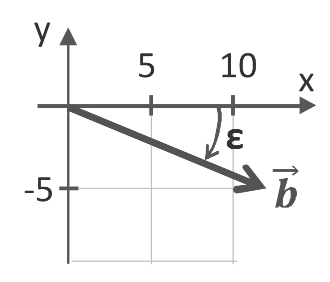
$$\vec{b}:\quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{5}{11} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{5}{11}x$$

h / i) es muy importante graficar un vector, antes de trabajar con sus ángulos, eso

permite trabajar con algún ángulo del I (primer cuadrante).



$\alpha_a \in$ II = 180° − ε = 180° − arc tg 2/3 ≅ 146,3°



$\alpha_b \in$ IV = 360° − ε = 360° − arc tg 5/11 ≅ 335,6°

11.8 Ecuaciones vectoriales

Las ecuaciones vectoriales tienen que tener vectores de ambos lados:

$\vec{A} = \vec{B}$	BIEN – vectores son iguales a vectores

Las operaciones deben ser sólo las permitidas:

$\vec{A} + b$	MAL – no se puede sumar números y vectores
$\vec{A} - b$	MAL – ídem anterior
$k\,\vec{A}$	BIEN – es la operación escalar por vector
$\frac{1}{k}\ \vec{A}$	BIEN – idem anterior (siempre que k≠0)
$\frac{k}{\vec{A}}$	MAL – no se puede dividir por un vector
$\vec{A} = B$	MAL – vectores no son iguales a números

Expresar qué relación hay entre los vectores presentes en las siguientes ecuaciones.

11.26) $\vec{A} - \vec{B} = \vec{0}$ gp

R: los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son iguales, porque coinciden en módulo, dirección, y sentido

11.27) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$ gp

R: $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen igual módulo, la misma dirección, y sentido opuesto

11.28) $\vec{A} = k\,\vec{B}$ con k ∊ ℝ – { 0 } gp

R: $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son proporcionales. Cuando k >0, los vectores apuntan en el mismo sentido, cuando k < 0, en sentido opuesto

11.29) $-2\vec{A} + \vec{B} = 3\vec{B}$ gp

R: $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen igual módulo, misma dirección, y sentido opuesto

11.30) $\vec{A} + \vec{B} = 4(\vec{A} - \vec{B})$ LT-TP7-ej.3c

R: $\vec{A} = 5/3\ \vec{B}$ es decir tienen la misma dirección y sentido, y el módulo de $\vec{A}$ es 5/3 del módulo de $\vec{B}$

11.31) Hallar los escalares α, λ, β, Ω, que hagan verdaderas las siguientes ecuaciones vectoriales:

a) $\alpha\,\vec{a} - 2\,\vec{b} = \Omega\,\vec{c}$ siendo: gp

$\vec{a} = (3\,;-7)$ $\vec{b} = (-2\,;5)$ $\vec{c} = (2\,;-6)$

R: $\alpha = -1$ $\Omega = 1/2$

b) $\vec{u} = \lambda\,\vec{v} + \beta\,\vec{w}$ siendo: LT-TP7-ej5

$\vec{u} = (5\,;-4)$ $\vec{v} = (4\,;1)$ $\vec{w} = (1\,;2)$

R: $\lambda = 2$ $\beta = -3$

11.32) Determinar el vector $\vec{c}$ que hace verdadera la ecuación vectorial siguiente: LT-TP7-ej6

$3\,\vec{a} - 5\,\vec{b} + 2\,\vec{c} = \vec{0}$

siendo $\vec{a} = (-3\,;1)$ $\vec{b} = (-2\,;5)$

R: $\vec{c} = (-1/2\,;11)$

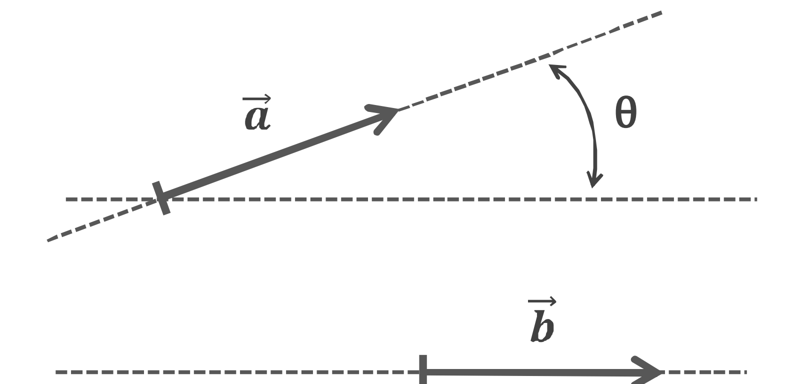
11.33) Determinar los valores reales de λ para que se cumpla la igualdad $\vec{a} = \lambda\,\check{\imath} + (\lambda + 1)\,\check{\jmath}$ LT-TP7-ej7

Y que además sea $|\vec{a}| = \sqrt{5}$

R: $\lambda = 1$ ∨ $\lambda = -2$

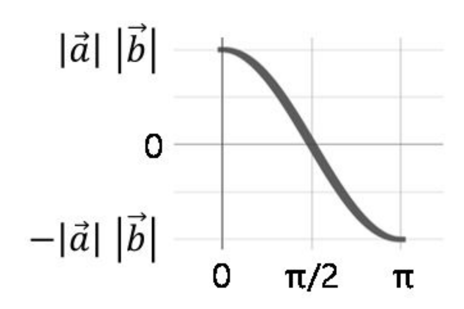
11.9 Producto escalar

11.9.1 Definición geométrica



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,cos\theta$$

El producto escalar es esencialmente una función coseno con θ ϵ [0; π):



Lo que permite la interpretación física de la operación producto escalar:

<u>CASO I</u>: los vectores apuntan “más o menos en la misma dirección” θ < 90°



<u>CASO II</u>: los vectores no apuntan ni en la misma, ni en la dirección opuesta θ = 90°



<u>CASO III</u>: los vectores apuntan “más o menos” en dirección opuesta θ > 90°



El producto escalar es una medida de si los vectores apuntan más o menos en la misma dirección (+) o en la dirección opuesta (-).

11.9.2 Propiedades

1) Conmutativa: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$
2) Distributiva: $\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$
3) Asociativa: $\lambda\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) = (\lambda\,\vec{a}) \bullet \vec{b}$
4) Producto escalar por sí mismo: $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$

11.9.3 Forma algebraica

El producto escalar puede calcularse fácilmente sin usar ángulos:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left(a_x\,\check{\imath} + a_y\,\check{\jmath}\right) \bullet \left(b_x\,\check{\imath} + b_y\,\check{\jmath}\right)$$

$= a_x\, b_x\, \check{\imath} \bullet \check{\imath} + a_x\, b_y\, \check{\imath} \bullet \check{\jmath} + a_y\, b_x\, \check{\jmath} \bullet \check{\imath} + b_x\, b_y\, \check{\jmath} \bullet \check{\jmath} = a_x\, b_x + a_y\, b_y$

11.9.4 Ejercicios básicos

Ej. 7: hallar el producto escalar entre $\vec{a} = (5\sqrt{3}\,;\,5)$ y $\vec{b} = (-5\sqrt{3}\,;\,5)$, calcular el ángulo entre los dos vectores, e interpretar según lo visto más arriba.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y = 5\sqrt{3}\,(-5\sqrt{3}) + 5\,.\,5 = -75 + 25 = -50$$

$$cos\theta = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{-50}{10\,.\,10} = -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 150° \quad \Longrightarrow \quad \text{"más o menos" en contra}$$

ACTIVIDAD: Calcular el producto escalar entre los siguientes dos vectores, y usando el producto escalar, hallar posteriormente el ángulo entre los mismos.

11.34) $\vec{a} = (3\,;\,-1)$ — LT-teoría (a)
$\vec{b} = (-2\,;\,5)$ — R : $\vec{a} \bullet \vec{b} = -11 \quad \theta_{ab} = 130°\,14'$

11.35) $\vec{r} = 3\,\check{\imath}$ — LT-teoría (b)
$\vec{s} = 4\,\check{\imath} - \check{\jmath}$ — R : $\vec{r} \bullet \vec{s} = 12 \quad \theta_{rs} = 14°\,2'$

11.36) $\vec{v} = 4\,\check{\imath} + 6\,\check{\jmath}$ — LT-teoría (c)
$\vec{w} = (6\,;\,-4)$ — R : $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0 \quad \theta_{vw} = 90°$

11.37) $\vec{c} = 2\,\check{\imath} - \check{\jmath}$ — LT-teoría (d)
$\vec{d} = (1\,;\,1)$ — R : $\vec{c} \bullet \vec{d} = 1 \quad \theta_{cd} = 71°\,33'$

11.38) $\vec{m} = 5\,\check{\jmath}$ — gp
$\vec{n} = -4\,\check{\imath} - 3\,\check{\jmath}$ — R : $\vec{m} \bullet \vec{n} = -15 \quad \theta_{mn} = 126{,}9°$

11.39) $\vec{a} = (5\sqrt{3};\,5)$ — gp
$\vec{b} = (-5\sqrt{3};\,5)$ — R : $\vec{a} \bullet \vec{b} = -50 \quad \theta_{ab} = 120°$

11.10 Vectores perpendiculares de igual módulo

Es fácil obtener dos vectores normales a un vector dado, del mismo módulo. Sea el vector $\vec{A} = (Ax\,;Ay)$, los dos vectores que estamos buscando son los que se obtienen invirtiendo las componentes, y cambiándole el signo a una de ellas:

$$\vec{n}_1 = (Ay\,;-Ax) \qquad \vec{n}_2 = (-Ay\,;Ax)$$

Para cada uno de los vectores siguientes (mismos del punto 11.4 anterior), hallar dos vectores perpendiculares al mismo, que tengan el mismo módulo que dicho vector.

11.40) $\vec{a} = (4\,;\,0)$ gp R: $\vec{n}_1 = (0\,;\,4) \quad \vec{n}_2 = (0\,;\,-4)$

11.41) $\vec{b} = (3\ ;\ 2)$ gp R: $\vec{n}_1 = (-2\ ;\ 3)$ $\vec{n}_2 = (2\ ;\ -3)$

11.42) $\vec{c} = (0\ , -5)$ gp R: $\vec{n}_1 = (-5\ ;\ 0)$ $\vec{n}_2 = (5\ ;\ 0)$

11.43) $\vec{d} = (20\ , 180°)$ gp R: $\vec{n}_1 = (0\ ;\ 20)$ $\vec{n}_2 = (0\ ;\ -20)$

11.44) $\vec{e} = (10\ , 60°)$ gp R: $\vec{n}_1 = (-8{,}7\ ;\ 5)$ $\vec{n}_2 = (8{,}7\ ;\ -5)$

11.45) $\vec{f} = (2\ , 210°)$ gp R: $\vec{n}_1 = \left(1\ ;\ -\sqrt{3}\right)$ $\vec{n}_2 = \left(-1\ ;\ \sqrt{3}\right)$

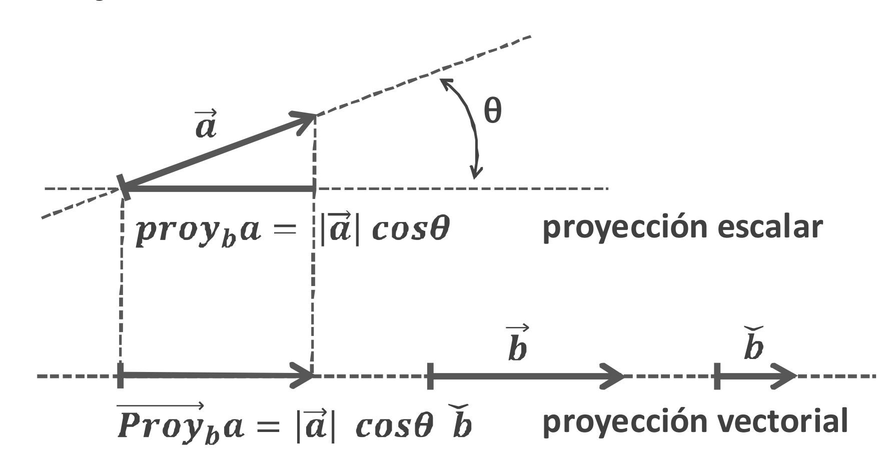
11.46) $\vec{g} = -5\,\breve{\imath} + 20\,\breve{\jmath}$ gp R: $\vec{n}_1 = (-20\ ;\ -5)$ $\vec{n}_2 = (20\ ;\ 5)$

11.47) $\vec{h} = 4\,\breve{\imath} - 2\,\breve{\jmath}$ gp R: $\vec{n}_1 = (2\ ;\ 4)$ $\vec{n}_2 = (-2\ ;\ -4)$

11.48) $\vec{m} = (-3\ ;\ -4)$ gp R: $\vec{n}_1 = (4\ ;\ -3)$ $\vec{n}_2 = (-4\ ;\ 3)$

11.49) $\vec{n} = (10\ ;\ 90°)$ gp R: $\vec{n}_1 = (10\ ;\ 0)$ $\vec{n}_2 = (-10\ ;\ 0)$

11.11 Proyección vectorial



La proyección vectorial de un vector sobre una recta, es obtener cómo sería dicho vector, proyectado en una dirección dada. La manera de obtener el vector proyección es conociendo un vector sobre la recta deseada.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{Proy_b}a = |\vec{a}|\ \cos\theta\ \breve{b} \\ \cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad \breve{b} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \end{array}\right\} = |\vec{a}|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\,\breve{b}$$

Y a partir de acá, se abren dos posibles caminos, que llevan a dos fórmulas:

<u>Fórmula 1</u> de la proyección vectorial del vector $\vec{a}$ en la dirección del vector $\vec{b}$:

$$= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\,\breve{b} = \left(\vec{a}\cdot\breve{b}\right)\breve{b}$$

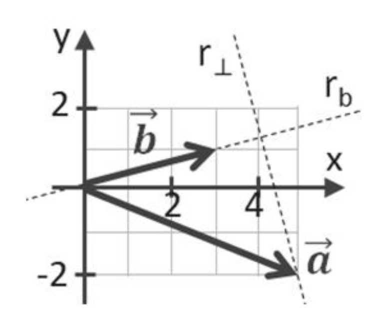
<u>Fórmula 2</u> de la proyección vectorial del vector $\vec{a}$ en la dirección del vector $\vec{b}$:

$$= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

<u>Ej. 8</u>: hallar la proyección vectorial de $\vec{a} = (5\ ;\ -2)$ sobre el vector $\vec{b} = (3\ ;\ 1)$

Grafiquemos los vectores para tener una idea más clara.

Como no tenemos ningún versor, conviene usar la fórmula 2, que es la obtiene el resultado directamente:



$$\overrightarrow{Proy_b}a = (\vec{a} \cdot \vec{b})\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2} = [(5\,;\,-2)\cdot(3\,;\,1)]\frac{(3\,;\,1)}{3^2+1^2}$$

$$\overrightarrow{Proy_b}a = [(15-2)]\frac{(3\,;\,1)}{9+1} = \frac{13}{10}\,(3\,;\,1) = \left(\frac{39}{10};\frac{13}{10}\right)$$

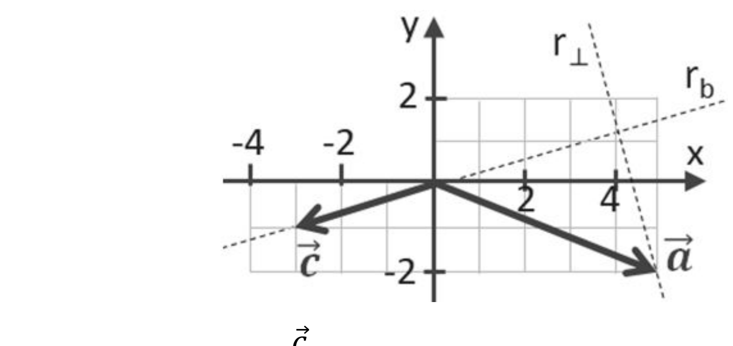
Calculemos también los ángulos de todos los vectores:

$$\theta_a = 180° - arc\,tg\,\frac{a_y}{a_x} = 180° - arc\,tg\left(-\frac{2}{5}\right) = 158{,}2°$$

$$\theta_b = arc\,tg\,\frac{b_y}{b_x} = arc\,tg\frac{1}{3} = 18{,}4°$$

$$\theta_{proy} = arc\,tg\,\frac{proy_y}{proy_x} = arc\,tg\frac{13/10}{39/10} = 18{,}4°$$

Ej. 9: repetimos el ejemplo anterior pero ahora, con el vector de referencia al revés, y además le vamos a duplicar el módulo $\vec{c} = (-6\,;\,-2)$, de manera de verificar que la proyección vectorial será la misma, sólo necesitamos un vector sobre la recta.



$$\overrightarrow{Proy_c}a = (\vec{a} \cdot \vec{c})\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|^2} = [(5\,;\,-2)\cdot(-6\,;\,-2)]\frac{(-6\,;\,-2)}{(-6)^2+(-2)^2}$$

$$\overrightarrow{Proy_c}a = (\vec{a} \cdot \vec{c})\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|^2} = [(-30+4)]\frac{(-6\,;\,-2)}{36+4}$$

$$\overrightarrow{Proy_c}a = -26\,\frac{(-6\,;\,-2)}{40} = -\frac{13}{20}(-6\,;\,-2) = \left(\frac{39}{10};\frac{13}{10}\right)$$

Hacer los siguientes ejercicios sobre proyección vectorial:

11.50) Dados los vectores: gp

$\vec{r} = (3\,;\,0)$ $\quad \vec{s} = (4\,;\,-1)$ R :

$\vec{v} = 4\,\check{\imath} + 6\,\check{\jmath} \qquad \vec{w} = (6\,;\,-4)$

Hallar:

a) $\overrightarrow{Proy_r s}$
b) $\overrightarrow{Proy_w v}$
c) $\overrightarrow{Proy_r w}$
d) $\overrightarrow{Proy_w s}$

a) $\overrightarrow{Proy_r s} = 4\,\check{\imath}$
b) $\overrightarrow{Proy_w v} = \vec{0}$
c) $\overrightarrow{Proy_r w} = 6\,\check{\imath}$
d) $\overrightarrow{Proy_w s} = \frac{42}{13}\check{\imath} - \frac{28}{13}\check{\jmath}$

11.51) Dados los vectores:

$\vec{a} = (4\,;\,-3) \qquad \vec{b} = (-1\,;\,-1)$

Hallar:

a) $\overrightarrow{Proy_b a}$
b) $\overrightarrow{Proy_a b}$

LT-teoría

R: a) $\overrightarrow{Proy_b a} = \frac{1}{2}\,\check{\imath} + \frac{1}{2}\,\check{\jmath}$
b) $\overrightarrow{Proy_a b} = -\frac{4}{25}\,\check{\imath} - \frac{3}{25}\,\check{\jmath}$

11.52) Dados los vectores:

$\vec{p} = (-3\,;\,1) \qquad \vec{q} = (2\,;\,3)$

Hallar:

a) $\overrightarrow{Proy_q p}$
b) $\overrightarrow{Proy_p q}$

LT-TP7-ej.9

R :

a) $\overrightarrow{Proy_q p} = -\frac{6}{13}\,\check{\imath} - \frac{9}{13}\,\check{\jmath}$
b) $\overrightarrow{Proy_p q} = \frac{9}{10}\,\check{\imath} - \frac{3}{10}\,\check{\jmath}$

11.53) Determinar la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, si se sabe que $\vec{u} = \check{\imath} - 4\,\check{\jmath}$ y $\vec{v}$ tiene como origen y extremo, los puntos (-2 ; 4) y (-5 ; 1) respectivamente

LT-TP7-ej.10

R : $\overrightarrow{Proy_v u} = -\frac{3}{2}\,\check{\imath} - \frac{3}{2}\,\check{\jmath}$

11.12 Problemas mezcla de todo lo anterior

11.54) Dados los vectores $\vec{a} = (-2\,;\,5)$ y $\vec{b} = (2\,;\,-8)$, hacer las siguientes operaciones con ellos, indicando si el resultado es un vector o un escalar:

a) $2/5\,\vec{a}$
b) $3\,(\vec{a} + \vec{b})$
c) $|4\,\vec{a} - 3\,\vec{b}|$
d) $-2\,\vec{a} \cdot \vec{b}$
e) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$
f) $\vec{a}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$

R : a) vector: $(-4/5\,;\,2)$ b) vector: $(0\,;\,-9)$
c) número: $2\sqrt{533}$ d) número: 88
e) número: -15 f) vector: $(88\,;\,-220)$

LT-TP7-p4 modif gp

11.55) Calcular el módulo del vector $\vec{b}$ sabiendo que $\vec{a}$ es ortogonal al vector $\vec{b} - \vec{a}$, que $|\vec{a}| = 2$, y el ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{a}$ es π/4.

R : $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$

LT-TP7-p12 modificado gp

11.56) Hallar el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si se sabe que $\vec{u} = 3\breve{\imath} + 4\breve{\jmath}$, y que $\vec{v}$ tiene primera componente igual a (-2) y es perpendicular a $\vec{w} = 6\breve{\imath} + 4\breve{\jmath}$

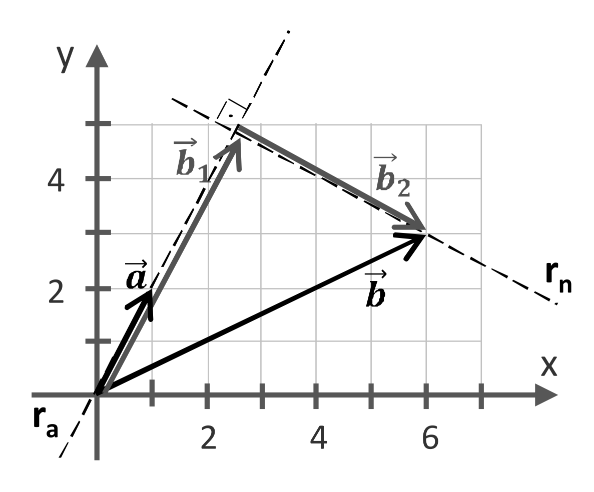
R : 70° 33′ LT-TP7-p13

11.57) Dados los vectores: $\vec{a} = (1\ ;\ 2)$ $\vec{b} = (6\ ;\ 3)$

Descomponer al vector $\vec{b}$ en la suma de dos vectores, uno en la misma dirección que $\vec{a}$ y el otro en una dirección ortogonal al $\vec{a}$. Graficar todos los vectores.

R : $\vec{b}_1 = \left(\frac{12}{5}\ ;\ \frac{24}{5}\right)$ $\vec{b}_2 = \left(\frac{18}{5}\ ;\ -\frac{9}{5}\right)$ LT-TP7-ej.15 modificado gp

Y el gráfico pedido es:



11.58) 15,2 es el módulo del vector proyección de $\vec{u} = x^2\ \breve{\imath} + x\ \breve{\jmath}$ sobre $\vec{v} = 4\ \breve{\imath} + 3\ \breve{\jmath}$

Determinar el vector $\vec{u}$ si sus componentes son positivas y si $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$

R : $\vec{u} = (16\ ;4\ )$ LPE-153

11.59) Dados los vectores $\vec{a} = -4\ \breve{\imath} + 4\ \breve{\jmath}$ y $\vec{b} = 3\ \breve{\imath} - \breve{\jmath}$

Determinar el vector proyección de $\vec{b}$ sobre el vector $\vec{a} + \vec{b}$

R : $\overrightarrow{Proy}_{a+b}b = (3/5\ ; -9/5\ )$ LPE-250

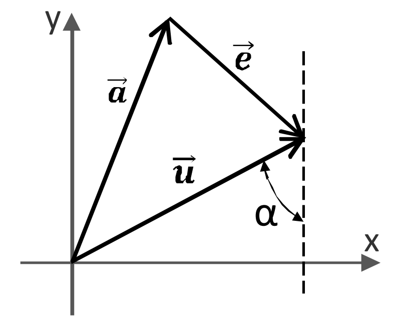
11.60) Sean $\vec{a} = x\ \breve{\imath} + 20\ \breve{\jmath}$ $\vec{e} = \breve{\imath} - 8\ \breve{\jmath}$

$|\vec{u}| = 20$ $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$

Determinar el vector $\vec{a}$ y su módulo

R: $\vec{a} = (15\ ; 20\ )$ $|\vec{a}| = 25$

LPE-152



11.61) Calcule el producto escalar entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabiendo que:

$|\vec{a}| = 3$ y $\vec{a} = -2\ \vec{b}$

R : $\vec{a} \cdot \vec{b} = -9/2$ LT-TP7-ej.11a

11.62) Calcular el producto escalar entre $\vec{c}$ y $\vec{d}$ sabiendo que: $|\vec{c}| = 2$ y $\vec{c} = -3\,\vec{d}$

R : $\vec{c} \cdot \vec{d} = -4/3$ gp

11.63) Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son ortogonales. Hallar las coordenadas del punto P, sabiendo que dicho punto pertenece al eje de ordenadas, y que además las coordenadas de los demás puntos mencionados R y S son:

Q (-1 ; 3) R (2 ; 1) S (3 ; -4)

R : el punto P tiene coordenadas $P(0\,;16/5)$ LPE-249

11.64) Sean los vectores: $\vec{a} = (k\,;-3)$ $\vec{b} = (6\,;8)$ $\vec{c} = (4\,;m)$

Hallar:

a) El vector $\vec{a}$ que resulte ortogonal al vector $\vec{b}$
b) El vector $\vec{c}$ que sea proporcional al vector $\vec{b}$

R : $\vec{a} = (4\,;\,-3)$ $\vec{c} = (4\,;\,16/3)$ P2.T501.1703

11.65) Determinar la expresión cartesiana de un vector que sea ortogonal al vector $\vec{v} = -6\breve{\imath} + 10\breve{\jmath}$ si se sabe que la suma de sus componentes es 2.

R : $\vec{a} = (5/4\,;\,3/4)$ LT-4a-pág278

11.66) La suma de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual a la diferencia entre $\vec{w}$ y $\vec{u}$. Determinar el vector suma de los tres vectores, si el módulo de la suma es 30 y si $\vec{w} = a^2\breve{\imath} - 18\breve{\jmath}$

R : $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 24\breve{\imath} - 18\breve{\jmath}$ LT-4b-pág278

11.67) Determinar el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que:

$|\vec{u}| = 4$ $|\vec{v}| = 5$ $|\vec{u} - \vec{v}| = 8$

R : 125,1° LPE-366

11.68) Dados los vectores: $\vec{a} = (2\,;-4)$ $\vec{b} = (3\,;\,1)$ $\vec{c} = (-4\,;\,k_1)$

$\vec{d} = (-66/9\,;\,2)$ $\vec{s} = (k_1\,;-11)$

Determinar:

a) El vector $\vec{s}$ que sea ortogonal al vector $\vec{d}$
b) El vector $\vec{c}$ si consideramos que $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + 2\,\vec{c}$

R : $\vec{s} = (-3\,;\,-11)$ $\vec{c} = (-4\,;\,-4)$ P2.T5.1303

11.69) Dados los vectores: $\vec{a} = (2\,;\,3)$ $\vec{b} = (1\,;\,k)$ $\vec{c} = (4\,;\,m)$ $\vec{d} = (1\,;5/4)$

Y las relaciones: $\vec{a} = 2\,\vec{b}$ y $\vec{c} = 4\,\vec{d}$

Determinar el valor de $\lambda \neq 0$ para que sean perpendiculares los vectores

$\vec{r} = (\lambda\ ;\ 3)$ y $\vec{t} = 2\,\vec{a} + \vec{b} + 3\,\vec{c} - 2\,\vec{d}$

R : $\lambda = -4$ P2.T5.1303

11.70) Dados los vectores: $\vec{a} = (3\ ;\ 1)$ $\vec{b} = (1\ ;\ -6)$

Determinar k ≠ 0 para que los vectores $\vec{r} = (1\ ;\ 4)$ y $\vec{t} = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)(3/2k\ ; -6)$

Hagan verdadera la relación siguiente: $\vec{r} = 2/9\,\vec{t}$

R : k = – 1 P2.T3.1111

11.71) Dados los vectores: $\vec{a} = (k\ ;\ 3)$ $\vec{b} = (3\ ;\ p)$ $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

Determinar los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ si sus componentes son números reales positivos y se cumplen las relaciones: $\vec{c} \cdot \vec{d} = 2$ y $k^2 + p^2 = 6$

R : $\vec{a} = (2\ ;\ 3)$ $\vec{b} = \left(3\ ;\ \sqrt{2}\right)$ P2.T1.1203

11.72) Dados los vectores: $\vec{a} = (8\ ;\ 6)$ y $\vec{b} = (-1\ ;\ 2)$, determinar:

a) El vector $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$
b) El vector $\vec{d} = (k\ ; 1)$ que sea ortogonal al vector $\vec{e} = \vec{b} + \vec{a}$

R : $\vec{c} = (9\ ;\ 4)$ $\vec{d} = (-8/7\ ;\ 1)$ P2.T2.1403

11.73) Para los vectores: $\vec{a} = (a_1\ ;\ a_2)$ $\vec{b} = \left(b_1\ ;\ \sqrt{3}\,b_1\right)$

Se sabe que: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$; $|\vec{a}| = 4$; $\theta_{ab} = 2\pi/3$; $b_1 > 0$

Determinar el vector proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

R : $\overrightarrow{Proy_b a} = \left(-1\ ;\ -\sqrt{3}\right)$ R2.1212

11.74) Para los vectores: $\vec{a} = (2\ ;\ -4)$ $\vec{b} = (3\ ;\ 1)$ $\vec{c} = (-4\ ;\ k)$, determinar:

a) El vector proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$
b) El vector $\vec{c}$ ortogonal al vector $\overrightarrow{Proy_b a}$ hallado en (a)

R : $\overrightarrow{Proy_b a} = (3/5\ ;\ 1/5)$ $\vec{c} = (-4\ ;\ 12)$ P2.T3.1303

11.75) Sean los vectores: $\vec{a} = (x^2 - 6x\ ;\ -6x)$ $\vec{b} = (-2\ ;\ 2\,x^2)$

Tales que $\vec{a} + \vec{b} = (5\ ;\ 8)$. Calcular el producto escalar $\left(3\,\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$

R : –30 P2.T148.1803 / mod.gp

11.76) Sean los vectores: $\vec{a} = (k_1\ ;\ -30)$ $\vec{b} = (27\ ; 18)$ $\vec{c} = (9\ ; k_2)$ determinar, para los casos siguientes:

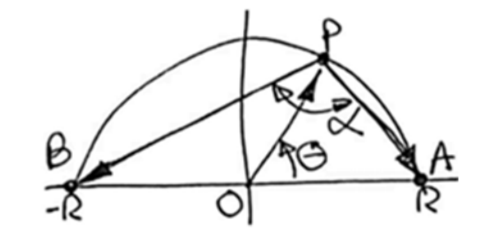
a) El vector $\vec{a}$, si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales entre sí
b) El vector $\vec{c}$, si $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son proporcionales (igual dirección gráfica) entre sí

R : a) $\vec{a} = (20 \; ; -30)$ b) $\vec{c} = (9 \; ; 6)$ F.T2.15.03 / mod.gp

11.77) Dados los vectores: $\vec{a} = (10 \; ; 30)$ $\vec{b} = (-10 \; ; 40)$ responder si son paralelos, perpendiculares entre sí, o ninguna de la dos.

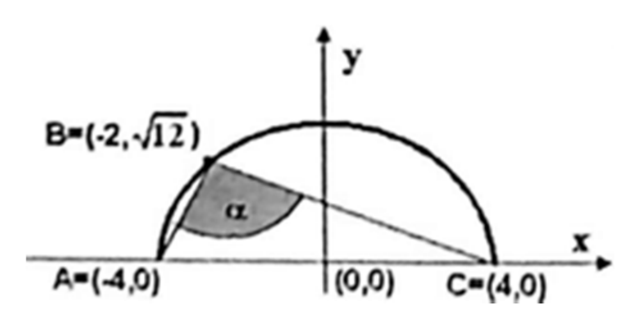
R : no son ni paralelos ni perpendiculares P2.T37.16.03

11.78) Demostrar en forma simbólica (sin números), que el ángulo α entre los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ del triángulo ABP, es siempre de 90°, hacerlo usando <u>métodos vectoriales</u>.



R : ayuda: plantear diferencia de vectores y usar producto escalar gp

11.79) Dados tres puntos A, B y C de una circunferencia de centro O, coincidente con el origen de coordenadas, cuyo radio es 4 cm, determinar el ángulo α entre los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$. Resolver el problema por <u>métodos vectoriales</u>.



R : $\alpha = 90°$ Rec2.1812 / mod.gp

11.80) Dado el vector $\vec{u} = (3 \; ; -1)$, hallar los versores $\check{v} = (a \; ; k)$ que sean perpendiculares al vector $\vec{u}$

R : $\check{v}_1 = \left(1/\sqrt{10} \; ; \; 3/\sqrt{10}\right)$ $\check{v}_2 = \left(-1/\sqrt{10} \; ; \; -3/\sqrt{10}\right)$ P2.T3.20.03 / modif gp

11.81) Dado el vector $\vec{a} = (3 \; ; 4)$, hallar los versores $\check{v}$ que formen un ángulo de 180°con el vector $\vec{a}$.

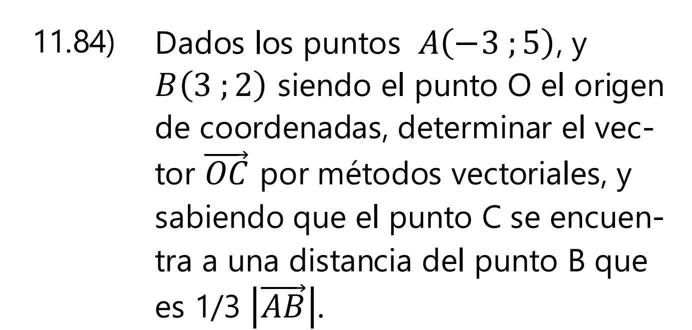
R : $\check{v} = (-3/5 \; ; \; -4/5)$ P2.T4.20.03 / modif gp

11.82) Para el vector $\vec{v} = (2 \; ; 3)$, hallar los vectores normales $\vec{n}$ al vector $\vec{v}$, que sean perpendiculares al mismo, y que tengan módulo 7.

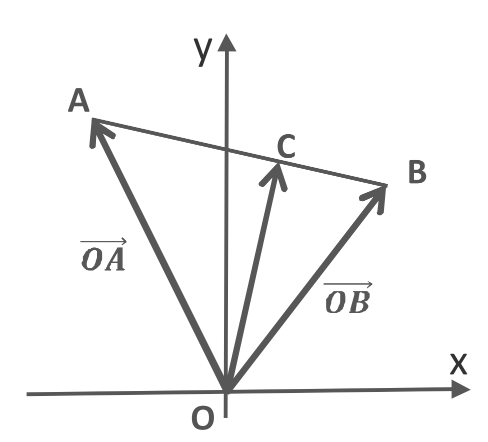
R : $\vec{n}_1 = \left(-21/\sqrt{13} \; ; \; 14/\sqrt{13}\right)$ $\vec{n}_2 = \left(21/\sqrt{13} \; ; \; -14/\sqrt{13}\right)$ gp

11.83) Sean $\vec{v} = (a \; ; 4)$, y $\vec{w} = (1 \; ; 2)$ dos vectores en el plano XY. Hallar la proyección vectorial de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$, sabiendo que la proyección de $\vec{v}$ sobre otro vector $\vec{e}$, es el vector (3;0).

R : $\overrightarrow{Proy_w v}$ = (11/5 ; 22/5) F.campus.21.03 / modif gp



11.84) Dados los puntos $A(-3\,;5)$, y $B(3\,;2)$ siendo el punto O el origen de coordenadas, determinar el vector $\overrightarrow{OC}$ por métodos vectoriales, y sabiendo que el punto C se encuentra a una distancia del punto B que es 1/3 $|\overrightarrow{AB}|$.

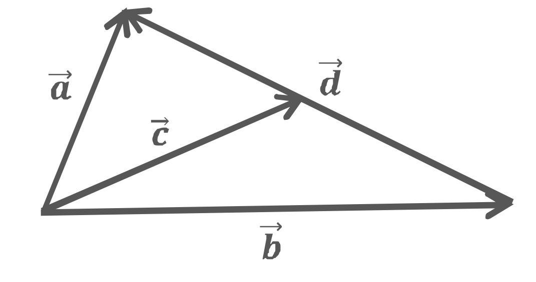


R : $\overrightarrow{OC}$= (1; 3) F.T1.15.07 / modif gp

11.85) Dados los vectores $\vec{a} = (3\,;8)$, y $\vec{b} = (10\,;1)$, determinar:

a) el ángulo entre dichos vectores.

b) el vector $\vec{c}$ que divide al vector $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ en dos partes iguales.



R : a) 63° 44’ b) $\vec{c}$= (13/2 ; 9/2) F.T1.17.07

11.86) El vector $\vec{b}$ tiene un versor asociado $\breve{b} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es de 60°, también se sabe que $|\vec{a}| = \sqrt{20}$. La coordenada en x del vector $\overrightarrow{Proy_b a}$ es igual a $\frac{2k}{\sqrt{4k+3}}$. Hallar el valor positivo de k.

R : 3/2 P2.T1.22.03 / mod gp



11.87) Sean los vectores entre dos puntos $\overrightarrow{OA} = \breve{\imath} + 3\breve{\jmath}$; $\overrightarrow{OB} = 2\breve{\imath} + \breve{\jmath}$ que van desde el origen de coordenadas O hasta los puntos A, y B, los que son lados de un paralelogramo con vértices en OABC.

a) Determinar por procedimientos vectoriales, las coordenadas del punto C.

b) Hallar un vector ortogonal al $\overrightarrow{OC}$ de módulo unitario y con x>0.

c) Calcular el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

R : a) C(3;4) b) (4/5 ; -3/5) c) 45° P2.T3.22.03

11.88) Dado el vector $\vec{b} = (-3; 4)$ encontrar todos los vectores $\vec{a}$ de módulo $5\sqrt{5}$ que sea tales que la proyección vectorial de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ sea igual a $\vec{b}$

R : $\vec{a}_1 = (5; 10)$ $\vec{a}_2 = (-11; -2)$ R2.T4.22.03

11.89) Dados los puntos $A(-2\,;-3)$, $B(1\,;4)$, $C(5\,;-1)$:

a) Graficar los tres puntos a escala en el plano XY

b) Hallar y graficar los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$
c) Hallar los módulos de los tres vectores anteriores
d) Hallar los versores asociados a los tres vectores anteriores
e) Hallar los ángulos interiores del triángulo que forman los tres vectores
f) Hallar el ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$
g) Hallar $\overrightarrow{Proy_{AB}BC}$
h) Hallar un vector normal al vector $\overrightarrow{AB}$ que apunte hacia x<0 y que tenga módulo 58.
i) Hallar la dirección (recta) del vector $\overrightarrow{BC}$

R : b) $\overrightarrow{AB} = (3; 7)$ $\overrightarrow{BC} = (4; -5)$ $\overrightarrow{AC} = (7; 2)$ gp

c) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{58}$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{41}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{53}$

d) $\breve{AB} = \left(\frac{3}{\sqrt{58}}; \frac{7}{\sqrt{58}}\right)$ $\breve{BC} = \left(\frac{4}{\sqrt{41}}; -\frac{5}{\sqrt{41}}\right)$ $\breve{AC} = \left(\frac{7}{\sqrt{53}}; \frac{2}{\sqrt{53}}\right)$

e) 67,3° 50,9° 61,8° f) 118,2°

g) $\overrightarrow{Proy_{AB}BC} = \left(\frac{69}{58}; -\frac{161}{58}\right)$ h) $\left(-7\sqrt{58}; 3\sqrt{58}\right)$

i) y – 4 = – 5/4 (x – 1)

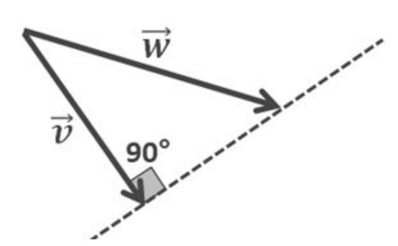
11.90) Siendo los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, y sabiendo que $|\vec{a}| = \frac{3}{2}|\vec{b}|$, hallar el valor de k para que los vectores $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a} - k\vec{b}$, y $\vec{d} = 3\vec{b} - \vec{a}$ también sean perpendiculares.

R : $k = 1/4$ P2.T4.Ej1a.23.03

11.91) Siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$, y sabiendo que $\vec{c} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$, y $\vec{b}$ es un versor ortogonal al vector $\vec{a}$, hallar el módulo de la proyección de $\vec{c}$ sobre $\vec{b}$.

R : $\left|\overrightarrow{Proy_b c}\right| = 3$ F.T4.Ej4a.22.03

11.92) Siendo $\vec{v}$ y $\vec{w}$ los vectores de la figura, y sabiendo que $\vec{v} = (-4; 3)$, calcular el producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$.



R : $\vec{v} \cdot \vec{w} = 25$ F.T1.Ej3a.22.03

12. MAGNITUDES FÍSICAS Y UNIDADES

12.1 SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino)

Argentina



La Tabla N°1 de más abajo muestra las **siete unidades básicas** definidas en el **SI (Sistema Internacional)** de unidades[8] (década del 60), el que posteriormente es adoptado por Argentina en el **SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino)** mediante la Ley N° 19.511 del año 1972. Las restantes unidades de todas las magnitudes, se pueden derivar a partir de estas siete unidades, usando las leyes de la física que las relacionan.

Tabla 1. Unidades de base SI

Magnitud de base	Unidad de base SI	
	Nombre	Símbolo
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
corriente eléctrica	ampere	A
temperatura termodinámica	kelvin	K
cantidad de materia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd



[8] Publicación oficial del SI (Sistema Internacional). https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure

Tabla 6. Unidades no pertenecientes al SI, aceptadas para el uso con el Sistema Internacional

Nombre	Símbolo	Valor en unidades SI
minuto	min	1 min = 60s
hora	h	1h = 60 min = 3 600 s
día	d	1d = 24 h = 86 400 s
grado	º	1º = (π/180) rad
minuto	´	1´= (1/60)º = (π/10 800) rad
segundo	“	1” = (1/60)´= (π/648 000) rad
litro	l,L	$1l = 1dm^3 = 10^{-3}\ m^3$
tonelada	t	$1t = 10^3$ kg
neper	Np	1 Np = 1
bel	B	1 B = (1/2) ln 10 (Np)

La Tabla N°5 siguiente muestra los prefijos que se pueden anteponer a las unidades, con el símbolo y multiplicador de cada prefijo.

Tabla 5. Prefijos SI

Factor	Nombre	Símbolo	Factor	Nombre	Símbolo
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	mili	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	µ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deca	da	10^{-24}	yocto	y

12.2 Magnitudes físicas

Como está dicho en el capítulo 11 (bueno releer), las magnitudes físicas se dividen en **magnitudes escalares** (sólo necesitan una unidad y un número real) y las **magnitudes vectoriales**, las que necesitan módulo, dirección y sentido[9]. Veremos a continuación algunas de ellas:

[9] Diferencia entre magnitudes escalares y vectoriales. Video en: https://youtu.be/5ucfHd8FWKw

12.2.1 Escalares

MASA (m)

La masa es una magnitud escalar y extensiva (depende de la extensión).

Tiene dos enfoques, 1) cantidad de materia, o sea moléculas de un material, sólido, líquido o gaseoso. Tienen masa las partículas subatómicas (electrones, protones, etc), como los átomos individuales, como las moléculas, y los cuerpos, líquidos o gases. A velocidades muy bajas respecto de la velocidad de la luz, como es la experiencia cotidiana, la masa es prácticamente constante, pero para velocidades muy altas, la masa aumenta. 2) la masa es la constante de proporcionalidad entre fuerza y aceleración, a mayor masa, más cuesta acelerar un cuerpo, es decir que la masa inercial es una medida de la inercia que tiene un cuerpo, la resistencia a cambiar su estado de traslación. A mayor masa, mayor será su inercia. La unidad de masa en el SIMELA es el kg.

La masa de la Tierra, escrita en notación científica (una sola cifra entera) es aproximadamente $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg.

VOLUMEN (V)

El volumen es una magnitud escalar y extensiva (depende de la extensión).

Es una medida de la cantidad de espacio tridimensional que ocupa un objeto o sustancia. Se expresa en unidades de longitud cúbica, en el SIMELA m^3 (metro cúbico). Cuando un objeto tiene una forma geométrica definida, puede calcularse su volumen matemáticamente. Cuando se trata de líquidos, habrá que colocarlos en algún recipiente que mida su volumen (ej. probeta graduada). El volumen de un sólido también puede determinarse por inmersión en un líquido y midiendo la diferencia de volumen.

El volumen de la Tierra, escrito en notación científica (una sola cifra entera) es aproximadamente $1{,}0832 \cdot 10^{12}$ km^3.

CAPACIDAD

La capacidad es también un volumen, que se usa para recipientes. Es el volumen de líquido o gas que es capaz de contener un recipiente. Una botella de gaseosa que indica 500 cm^3, no es esa la indicación del volumen del plástico, sino la cantidad de líquido que es capaz de contener la botella en su interior.

La capacidad suele expresarse en litros, cuya equivalencia con unidades de volumen es:

$1 \text{ litro} = 1000 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ cm}$

Lo que también puede pasarse a m^3, reemplazando $1 \text{ cm} = 10^{-2}$ m

$1 \text{ litro} = 10^3 \cdot (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$

DENSIDAD (ρ)

La densidad es una magnitud escalar e intensiva (no depende de la extensión).

Es la masa que tiene una sustancia o materia por unidad de volumen. Un material homogéneo tiene la misma densidad en todas sus partes.

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad [\rho] = \frac{kg}{m^3}$$

Algunos ejemplos de densidades:

Agua	1000 kg / m^3
Hielo	917 kg / m^3
Oxígeno	1,429 kg / m^3
Hierro	7874 kg / m^3
Magnesio	1740 kg / m^3

PRESIÓN (p)

Es una magnitud escalar, que no es una propiedad sino una medida de interacción. Es la fuerza normal por unidad de área que un líquido o gas ejerce perpendicularmente a otra superficie en contacto con él. Por ejemplo, la fuerza que sentimos que el agua de una piscina nos aplica en las piernas al ingresar en ella, y el ejemplo más conocido de nuestra vida cotidiana, la presión atmosférica, es la presión que la atmósfera nos ejerce permanentemente desde afuera de nuestro cuerpo.

$$p = \frac{F_N}{A} \qquad [p] = \frac{N}{m^2} = Pascal$$

TEMPERATURA (T)

Las moléculas en la materia no están en reposo, están en movimiento más o menos rápido, según el estado de la materia. Al moverse las moléculas, ellas interactúan colisionando entre ellas. La temperatura es una medida de la actividad molecular que tienen, cuanto mayor es el movimiento de las moléculas, mayor será la temperatura de la materia. El espacio vacío también puede tener temperatura, aunque no haya materia. La temperatura es una magnitud escalar, y las unidades de temperatura se establecen en ESCALAS de temperatura (Farenheit y Celsius) para las cuales se definen ciertos puntos específicos a los cuales se asignan valores específicos de temperatura. La escala Celsius (°C) asigna el valor 0°C al punto de congelamiento del agua, y el valor 100°C al punto de ebullición (diferencia 100°C), mientras que la escala Farenheit asigna el valor 32 °F al mismo punto de congelamiento, y 212°F al de ebullición (diferencia 180°F). La unidad Kelvin es una temperatura termodinámica que empieza desde 0K (no se dice ni

se escribe “grados” pues no es una asignación, es un cero absoluto en el cual no existe movimiento molecular posible, y no es posible bajar más T). Las conversiones son:

T[en°C] = T[en K] + 273,15 °C

T[en °F] = 9/5 . T[en °C] + 32 °F

T[en °C] = 5/9 . (T[en °F] – 32 °C)

12.2.2 Vectoriales

Son las que necesitan de los **vectores** y una unidad para ser expresadas. Vamos a usar:

Magnitud	Símbolo	Unidad
Fuerza	$\vec{F}$	N (Newton)
Posición	$\vec{r}$	m (metro)
Velocidad	$\vec{v}$	m/s (metro por segundo)
Aceleración	$\vec{a}$	m/s^2 (metro por segundo al cuadrado)

Las magnitudes **escalares**, sólo necesitan un número real con su unidad de medida.

Magnitud	Símbolo	Unidad
Masa	m	kg (kilogramo)
Temperatura	T	K (Kelvin) ; °C (grado Celsius)
Presión	P	N / m^2 (Newton / m^2)
Área	A	m^2 (metro cuadrado)
Volumen	V	m^3 (metro cúbico)

12.3 Representación vectorial de la posición de una partícula

La posición de una partícula estará SIEMPRE en tres dimensiones pues vivimos dentro de un universo tridimensional. Esas dimensiones estarán expresadas en un SC (sistema de coordenadas) según lo visto en 11.2. Usaremos aquí el sistema de coordenadas cartesiano XYZ, con sus versores canónicos ya vistos.

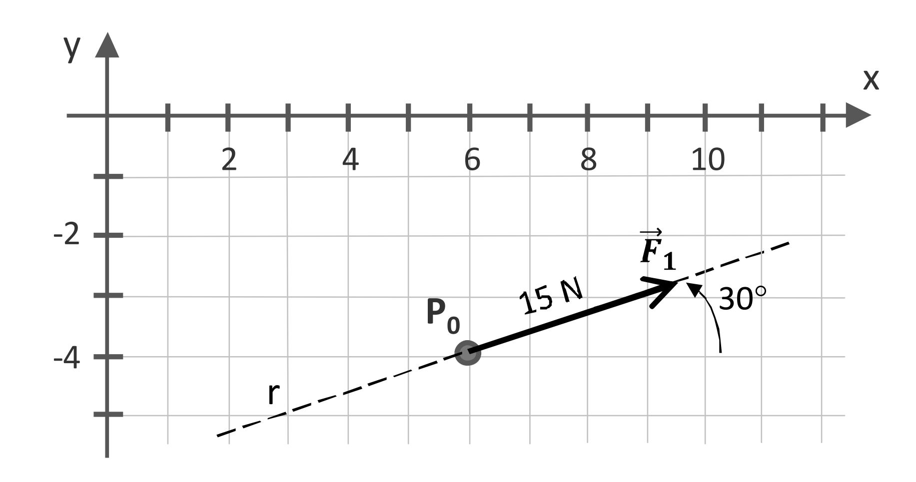
12.4 Representación vectorial de una fuerza

La fuerza es la siguiente magnitud vectorial a representar. Eso se hace de alguna de las tres maneras conocidas, respecto del sistema de coordenadas elegido, y usando las unidades correspondientes a dicha magnitud.

12.1) Una fuerza $\vec{F}_1$ está aplicada en el punto P_0 (6m ; -4m), la misma tiene 15 N de módulo, y su ángulo director α es de 30°. Representar la fuerza gráficamente, escribirla de las tres maneras posibles, y hallar su recta de acción.

R : $\vec{F}_1(6m;-4m) = (15N\ ;\ 30°) = \left(15\ \frac{\sqrt{3}}{2};\frac{15}{2}\right)N = 15\ \frac{\sqrt{3}}{2}N\check{\imath} + \frac{15}{2}N\check{\jmath}$ gp

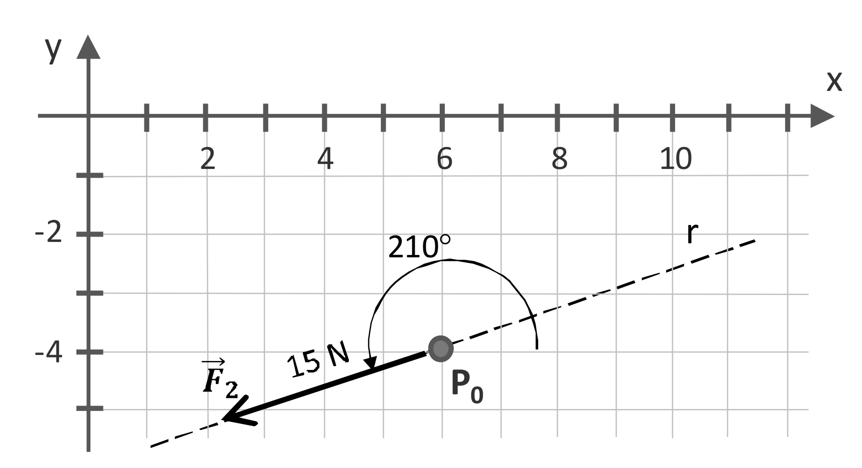
la dirección r es: y + 4 = tg 30° (x - 6)



12.2) Hallar la fuerza $\vec{F}_2$ opuesta a la fuerza del problema anterior, y aplicada en el mismo punto. Expresarla en las tres formas, y graficarla. El ángulo de la fuerza, ¿es el ángulo de inclinación de la recta?

R : $\vec{F}_2\ (6m; -4m) = (15N\ ;\ 210°) = \left(-15\ \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{15}{2}\right)N = -15\ \frac{\sqrt{3}}{2}N\ \check{i} - \frac{15}{2}N\ \check{j}$ gp

la dirección r es: y + 4 = tg 30° (x- 6)



El ángulo del vector (210°) no es el ángulo de la recta (30°)

12.3) Expresar las siguientes fuerzas, que están dadas en la forma cartesiana, en la forma trigonométrica, con su módulo y ángulo director (α) con el eje x.

$\vec{F}_1 = (6; 0)N$ $\vec{F}_4 = (0; -30)N$ $\vec{F}_7 = (-6; -3)N$

$\vec{F}_2 = (-20; 0)N$ $\vec{F}_5 = (3; 4)N$ $\vec{F}_8 = (20; -100)N$

$\vec{F}_3 = (0; 10)N$ $\vec{F}_6 = (-20; 10)N$

LT-TP7-p1

R : $\vec{F}_1 = (6\ N; 0°)$ $\vec{F}_2 = (20\ N; 180°)$ $\vec{F}_3 = (30\ N; 90°)$

$\vec{F}_4 = (30\ N; 270°)$ $\vec{F}_5 = (5\ N; 53°)$ $\vec{F}_6 = \left(\sqrt{500}\ N; 153{,}4°\right)$

$\vec{F}_7 = \left(\sqrt{45}\ N; 206{,}6°\right)$ $\vec{F}_8 = \left(\sqrt{10400}\ N; 281{,}3°\right)$

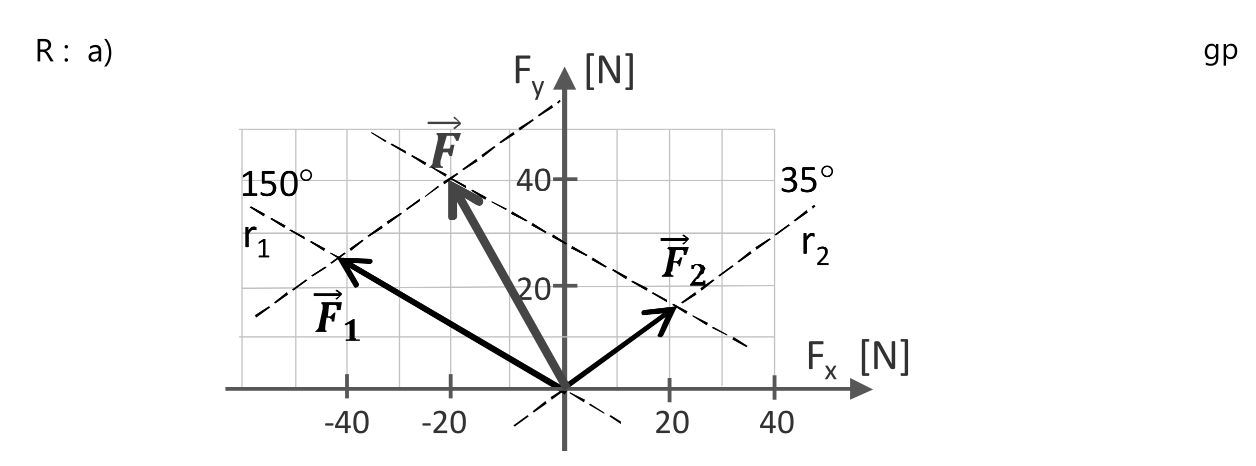
12.5 Descomposición de una fuerza en dos direcciones

12.4) Dada la fuerza $\vec{F}(0\,;0) = (-20\,;40)N$; descomponerla en dos fuerzas cuyas direcciones son la recta r_1 de inclinación 150°, y la recta r_2 de inclinación 35°. Se pide:

a) Graficar la fuerza desglosada en dos, según la regla del paralelogramo

b) Hallar las dos fuerzas analíticamente

R : a) gp

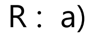


b) $\vec{F}_1 = (-42{,}3\,;24{,}4)N$ $\quad \vec{F}_2 = (22{,}3\,;15{,}6)N$

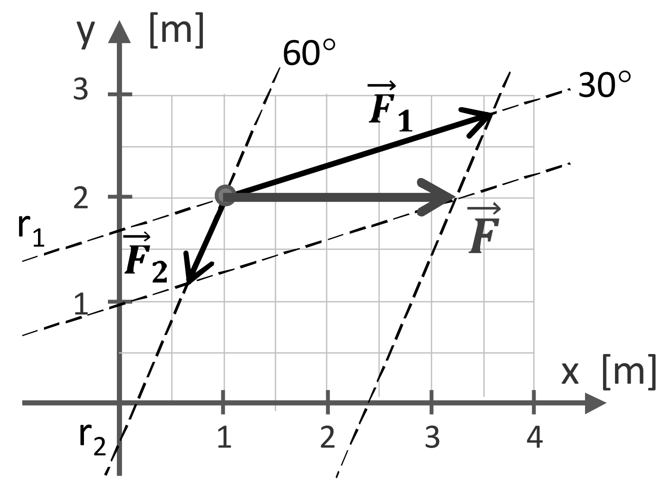
12.5) Dada la fuerza $\vec{F}(1;2) = (100\,N;0°)$; descomponerla en dos direcciones concurrentes al punto (1 ; 2) donde está aplicada, siendo una dirección la recta r_1 de inclinación 30°, y otra la recta r_2 de inclinación 60°. Se pide:

a) Graficar la fuerza desglosada en dos, según la regla del paralelogramo

b) Hallar las dos fuerzas analíticamente


R : a)

LT-p.278-5b modificado gp



b) $\vec{F}_1 = \left(100\sqrt{3}N;30°\right)$ $\quad \vec{F}_2 = (100N;240°)$

12.6 Fuerzas en equilibrio

Los siguientes problemas se refieren a *estática de traslación* solamente (no de rotación). Una partícula se encuentra en **equilibrio de traslación**, cuando la fuerza neta aplicada (causa) sobre ella es nula, la consecuencia por 2° Ley de Newton ($\vec{F} = m\,\vec{a}$) es que su

aceleración también será nula. Hallaremos fuerzas resultantes sobre una partícula, fuerzas equilibrantes, componentes, módulos y ángulos. Descompondremos fuerzas en dos direcciones. La unidad de fuerza tanto del SI (Sistema Internacional) como del SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino – Ley 19.511) es el **Newton [N]**. Saber los prefijos de unidades. Las magnitudes vectoriales no se pueden expresar como números.

12.11) Dado el siguiente sistema de fuerzas en el plano, donde todas las fuerzas tienen direcciones concurrentes al mismo punto:

$\vec{F}_1 = (100; 100)N \qquad \vec{F}_2 = (-300; 200)N$

$\vec{F}_3 = (200\ N; 45°) \qquad \vec{F}_4 = (100\ N; 150°)$

Hallar la fuerza resultante

R : $\vec{R} = -145{,}2\ N\ \check{\imath} + 491{,}4\ N\ \check{\jmath}$ LT-TP7-p4

12.12) El sistema de fuerzas del problema anterior:

a) ¿Está equilibrado?
b) En caso de no estarlo, hallar la fuerza equilibrante

R : a) no está equilibrado b) $\vec{E} = 145{,}2\ N\ \check{\imath} - 491{,}4\ N\ \check{\jmath}$ gp

12.13) Dado el siguiente sistema de fuerzas en el plano, donde todas las fuerzas tienen direcciones concurrentes al origen, determinar analíticamente la fuerza equilibrante del sistema:

$\vec{F}_1(0; 0) = (100\ N; 30°) \qquad \vec{F}_2(0; 0) = (20\ N; 120°)$

$\vec{F}_3(0; 0) = (100\ N; 240°) \qquad \vec{F}_4(0; 0) = (200\ N; 0°)$

R : $\vec{E}(0; 0) = (-226{,}6\ ; 19{,}28)N$ LT-TP7-p2

12.14) Dado el siguiente sistema de fuerzas en el plano, donde todas las fuerzas tienen direcciones concurrentes al mismo punto, y estando el sistema en equilibrio:

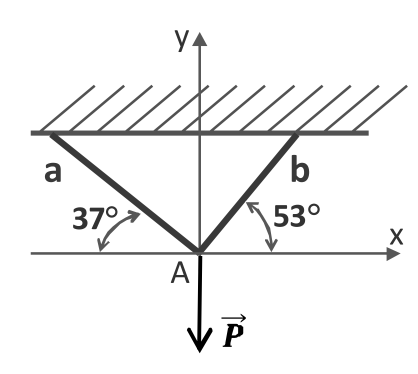
$\vec{F}_1 = (100; F_{1y})N \qquad \vec{F}_2 = (-300; 350)N \qquad \vec{F}_3 = (F_{3x}; -200)N$

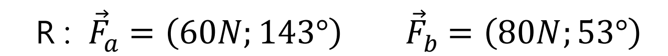
Hallar las componentes F_{1y} y F_{3x}

R : $F_{3x} = 200N \quad F_{1y} = -150N$ LT-TP7-p5 modif gp

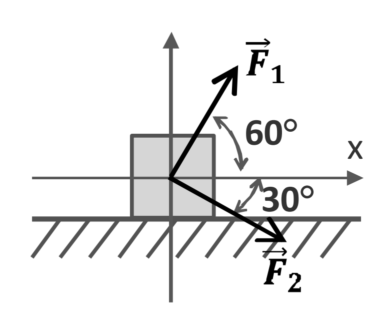
12.15) Para mantener en equilibrio a un objeto cuyo peso es $\vec{P} = (100\ N; 270°)$ en el punto A, se usan dos barras a y b, que están fijadas al techo, según muestra la figura.

Hallar la fuerza que las dos barras deben ejercer sobre el objeto, para equilibrar al sistema de fuerzas.




R : $\vec{F}_a = (60N; 143°)$ $\vec{F}_b = (80N; 53°)$ LT-TP7-p3

12.16) Dos hombres ejercen sobre un bloque las fuerzas $|\vec{F}_1| = 80N$ y $|\vec{F}_2| = 100N$; según indica la figura. A ellos se suma un joven que ejerce una fuerza adicional. ¿Cuál sería la mínima fuerza que el joven tiene que ejercerle al bloque, para lograr entre los tres, que el bloque se desplace solamente en el sentido x > 0 sin rozamiento?



R : $\vec{F}_3 = (50 - 40\sqrt{3})N\ \check{j}$ pex

12.17) Dado el sistema de fuerzas $\vec{F}_1 = (100; 100)N$ y $\vec{F}_2 = (300; 600)N$; determinar la equilibrante del sistema, y descomponer esta fuerza en dos direcciones a y b, cuyos ángulos con el eje x > 0 son 7π/6 y 7π/4.

R : $\vec{F}_a = (805{,}3N; 210°)$ $\vec{F}_b = (420{,}6N; 315°)$ P2.T4.1111

12.18) Dado el sistema de fuerzas $\vec{F}_1(0; 0) = (-4; 6)N$ y $\vec{F}_2(0; 0) = (-7; 3)N$; determinar la fuerza $\vec{F}_3(0; 0) = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ y equilibrar esta última con dos fuerzas, según las direcciones a y b. Estas direcciones tienen inclinación 60° y 90° respectivamente.

R : $\vec{F}_a = (6N; 240°)$ $\vec{F}_b = (2{,}2N; 90°)$ R2.1111

12.19) Dado el sistema de fuerzas $\vec{F}_1 = (10; 15)N$; $\vec{F}_2 = (-5; -5)N$; $\vec{F}_3 = (30; 40)N$; y $\vec{F}_4 = (20; -10)N$.

a) Determinar si el sistema de las cuatro fuerzas, está equilibrado
b) Hallar la resultante de las fuerzas $\vec{F}_1$; $\vec{F}_2\ y\ \vec{F}_3$
c) Hallar la fuerza que equilibre el sistema $\vec{F}_1$; $\vec{F}_2\ y\ \vec{F}_3$

R : a) No está equilibrado P2.T37.1603 / modificado gp

b) $\vec{R} = (35; 50)N$

c) $\vec{E} = (-35; -50)N$

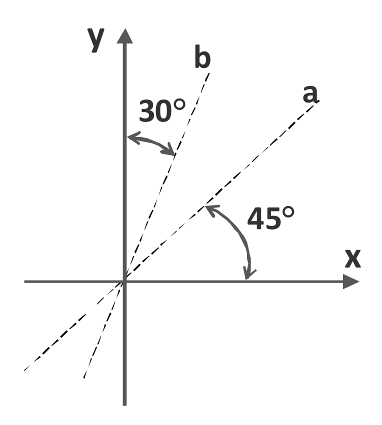
12.20) Sean las tres fuerzas coplanares siguientes: $\vec{F}_1 = (20; -10)N$; $\vec{F}_2 = (15; F_{2y})N$ y $\vec{F}_3 = (F_{3x}; 90)N$. Determinar las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ tales que ambas sean perpendiculares a $\vec{F}_1$.

R : $\vec{F}_2 = (15; 30)N$ $\vec{F}_3 = (45; 90)N$ P2.T148.1803

12.21) Las fuerzas $\vec{F}_1 = (20; -10)N$; $\vec{F}_2 = (15; F_{2y})N$ y $\vec{F}_3 = (F_{3x}; 90)N$ son coplanares. Determinar las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ tales que ambas sean paralelas a $\vec{F}_1$.

R : $\vec{F}_2 = (15; -7{,}5)N$ $\vec{F}_3 = (-180; 90)N$ P2.T149.1803

12.22) Dado el sistema plano de fuerzas concurrentes graficado a derecha donde $\vec{F}_1 = (10; 20)N$; $\vec{F}_2 = (-30; 20)N$; $\vec{F}_3 = (-50; -10)N$.



a) Determinar la equilibrante del sistema.
b) Descomponer la fuerza equilibrante en las dos direcciones que muestra la figura.
c) Graficar la fuerza equilibrante y las dos fuerzas en que se ha separado en (b).

R : a) $\vec{E} = (70; -30)N$ P2.T49.1603

b) $\vec{F}_a = (292{,}2\ N; 45°)$ $\vec{F}_b = (273{,}2\ N; 240°)$

12.23) En un punto de un cuerpo actúa un sistema plano de fuerzas concurrentes con las fuerzas $\vec{F}_1 = (100; 20)N$; $\vec{F}_2 = (-50; F_{2y})N$; $\vec{F}_3 = (20; 30)N$; $\vec{F}_4 = (F_{4x}; 100)N$ siendo la resultante de todas ellas $\vec{R} = (200\ N; 180°)$. Determinar las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_4$ expresando ambas en forma cartesiana y trigonométrica.

R : $\vec{F}_2 = (-50; -150)N = (158\ N\ ; 251°\ 34')$ P2.T1.1812

$\vec{F}_4 = (-270; 100)N = (288\ N\ ; 159°\ 41')$

12.24) Dado el sistema plano de fuerzas concurrentes:

$\vec{F}_1 = (100; -200)N$; $\vec{F}_2 = (F_{2x}; 400)N$; $\vec{F}_3 = (150; F_{3y})N$ y $\vec{F}_4 = (100; -100)N$

Determinar las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ si el sistema se encuentra en equilibrio.

R : $\vec{F}_2 = (-350; 400)N$ $\vec{F}_3 = (150; -100)N$ R2.1803

12.25) Dado el sistema plano de fuerzas concurrentes:

$\vec{F}_1 = (100\ N; 180°)$; $\vec{F}_2 = (200\ N; \alpha°)$; $\vec{F}_3 = (60; F_{3y})N$ y $\vec{F}_4 = (-60; -30)N$

Y su fuerza resultante es $\vec{R} = (100\sqrt{3}\ N; 90°)$. Determine las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ si se sabe que el ángulo α está en el primer cuadrante.

R : $\vec{F}_2 = (200\ N; 60°)$ $\vec{F}_3 = (60; 30)N$ P2.T116.1803

12.26) Dado el sistema plano de fuerzas concurrentes:

$\vec{F}_1 = (3/4; -3)N$; $\vec{F}_2 = (8; 2)N$; $\vec{F}_3 = (4; 10)N$

Determinar:

a) La fuerza equilibrante del sistema
b) De entre las tres fuerzas dadas, ¿hay fuerzas <u>ortogonales</u> entre sí?

R : a) $\vec{E} = (-51/4; -9)N$ b) sí, $\vec{F}_1 \perp \vec{F}_2$ P2.T1.1712

12.27) Dado el sistema plano de fuerzas concurrentes:

$\vec{F}_1 = (-3; 3/4)N$; $\vec{F}_2 = (2; 8)N$; $\vec{F}_3 = (10; 4)N$

Determinar:

a) La fuerza resultante del sistema
b) De entre las tres fuerzas dadas, ¿hay fuerzas paralelas entre sí?

R : a) $\vec{R} = (9; 51/4)N$ b) no P2.T2.1712

12.28) Dado el sistema plano de fuerzas concurrentes:

$\vec{F}_1 = (10; 20)N$; $\vec{F}_2 = (100N; 0°)$; $\vec{F}_3 = (50N; 270°)$; $\vec{F}_4 = (-5; 30)N$

Determinar:

a) La fuerza equilibrante del sistema
b) El ángulo entre las tres fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$

R : a) $\vec{E} = (-105; 0)N$ b) α = 63° 26′ P2.T701.1703

12.29) Dado el sistema plano de fuerzas concurrentes:

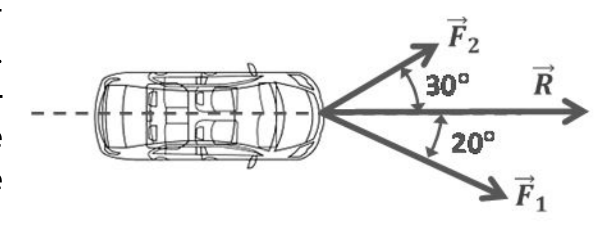
$\vec{F}_1 = (10; 40)N$; $\vec{F}_2 = (-5; 80)N$; $\vec{F}_3 = (20; -90)N$; $\vec{F}_4 = (15; -10)N$

Determinar:

a) La fuerza equilibrante del sistema
b) La fuerza $\vec{F}_5 = 2\,\vec{F}_1 - \vec{F}_2 + 3\,\vec{F}_3 - \vec{F}_4$

R : a) $\vec{E} = (-40; -20)N$ b) $\vec{F}_5 = (70;\ -260)N$ P2.T1.1611

12.30) Dos cables remolcan un auto, ejerciendo dos fuerzas, según muestra la figura. Si la resultante de estas fuerzas aplicadas tiene un módulo de 12000 N (doce mil Newton), determinar el módulo de ambas fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$



R : $|\vec{F}_1| = 7843\ N$ $|\vec{F}_2| = 5333\ N$ P2.T1.20.03 / modif gp

13. CINEMÁTICA BÁSICA

13.1 Introducción y definición

La *cinemática* es la parte de la mecánica que **describe el movimiento**, prescindiendo de sus causas. La descripción del movimiento de **traslación** se hace a través de tres magnitudes vectoriales: posición $\vec{r}$, velocidad $\vec{v}$, y aceleración $\vec{a}$. Adicionalmente, pueden usarse magnitudes similares para la **rotación**, ellas son: posición angular $\vec{\theta}$, velocidad angular $\vec{\omega}$, y aceleración angular $\vec{\gamma}$ (no vamos a usar estas últimas).

13.2 Modelo de partícula

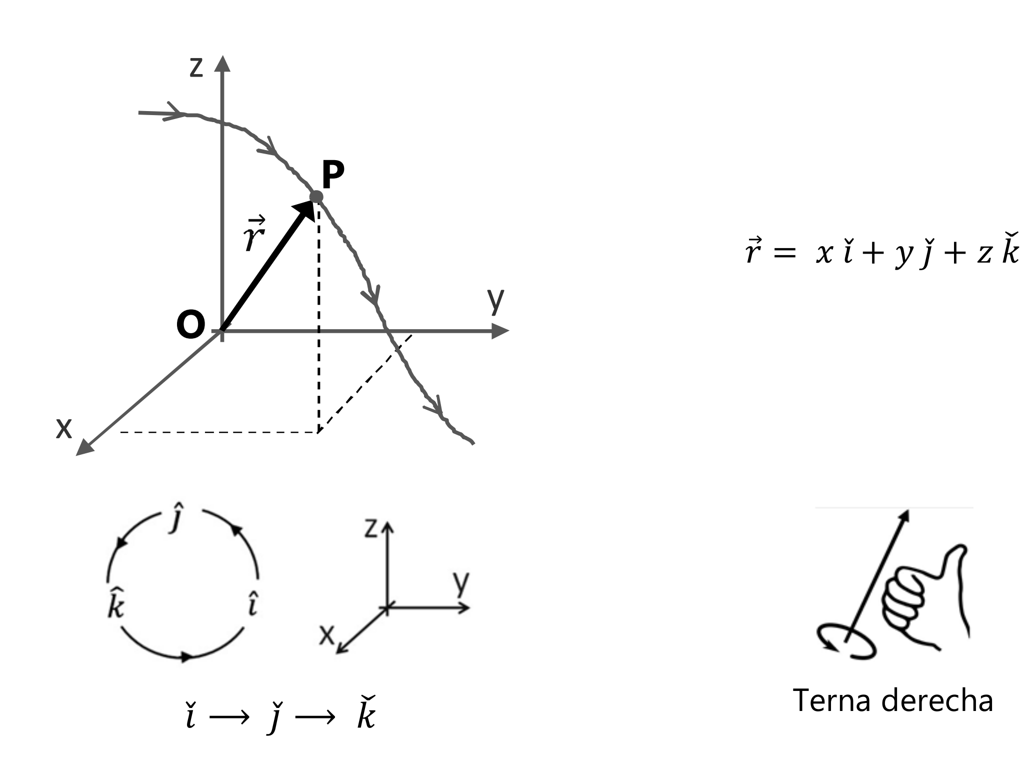
Aunque trabajemos con cuerpos, por conveniencia y simplicidad, vamos a usar el *modelo de partícula*. Una **partícula** o punto material es la abstracción de un cuerpo, es un punto en el espacio que tiene masa, pero no volumen.

13.3 Posición y movimiento

La **posición** de una partícula en el espacio queda definida por el vector $\overrightarrow{OP}$ (ver 11.2) que va desde el origen de coordenadas O hasta la partícula P, se llama **vector posición** (o simplemente posición) y se escribe $\vec{r}$. Hay **movimiento** cuando cambia el vector posición de un instante a otro.

13.4 Sistema de coordenadas cartesianas xyz

Para definir la posición necesitamos un sistema de coordenadas que, en física, es siempre tridimensional (vivimos en un espacio tridimensional). Usaremos aquí el sistema de coordenadas cartesianas XYZ (terna derecha):



Si la posición de la partícula varía en el tiempo, entonces hay movimiento, y podemos expresar tres funciones del tiempo dentro del vector posición:

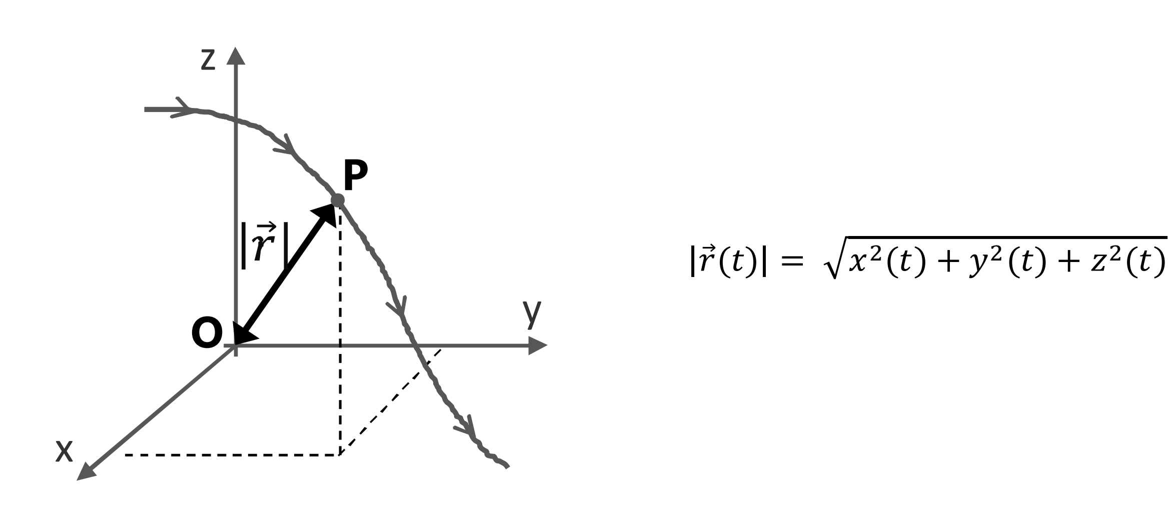
$$\vec{r}(t) = x(t)\,\breve{\imath} + y(t)\,\breve{\jmath} + z(t)\,\breve{k}$$

También puede representarse el movimiento con las **ecuaciones paramétricas del movimiento** (las mismas tres funciones anteriores) es decir**:**

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

La *expresión paramétrica del movimiento* es muy útil, porque conociendo el tiempo (parámetro) podremos saber el sentido del movimiento, tomando siempre que el movimiento se da para t creciente desde t = 0.

El módulo de la posición, será la distancia de la partícula al origen de coordenadas:



$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

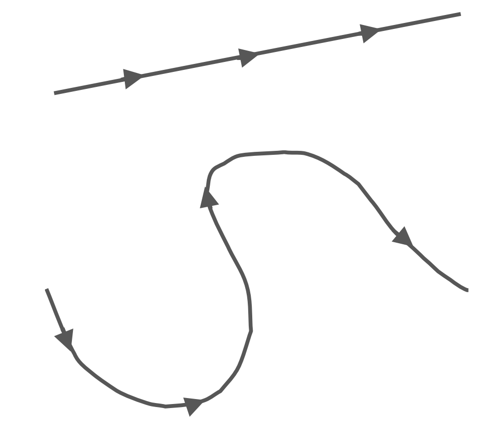
13.5 Trayectoria

La **trayectoria** de la partícula **es la curva orientada** que describe el movimiento en el espacio. Lleva una orientación (flecha), señalando en qué dirección se mueve la partícula a medida que aumenta t (ver los dos gráficos anteriores 17.1 donde se graficaron trayectorias con sus correspondientes flechas indicativas del movimiento).

El conjunto de los sucesivos infinitos puntos del espacio que ocupa la partícula al moverse, forman su trayectoria. La trayectoria puede ser **rectilínea**, o **curvilínea**.

Ej. N°1: trayectoria rectilínea

Ej. N°2: trayectoria curvilínea

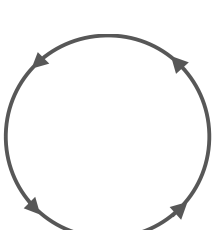


La **ecuación de la trayectoria** es la expresión matemática de la curva que une los puntos que la partícula ocupa en el espacio al moverse. Esta ecuación es una **función explícita** z = f (x;y), o si esto no es posible, será una **función implícita** f (x , y, z) = 0.

Ej. N°3: esta trayectoria puede expresarse mediante una función *explícita* (cuadrática).



Ej. N°4: esta trayectoria puede expresarse mediante una función *implícita* (ecuación de la circunferencia).



No debe confundirse *vector posición* con *ecuación de la trayectoria*. La posición es una función vectorial del tiempo $\vec{r}(t)$, en cambio, la ecuación de la trayectoria es una ecuación en xyz, que no tiene al tiempo en ella, ni indica el sentido del movimiento.

Ej. N°5: Trayectoria. Posición en función del tiempo. Paramétricas.

Una partícula se mueve en el plano XY, con *posición variable en el tiempo*:

$$\vec{r}(t) = (t-1)\,\breve{\imath} + (t+2)\,\breve{\jmath}$$

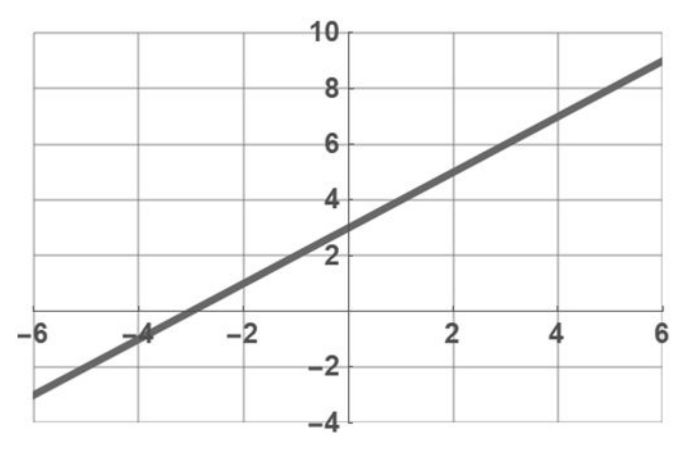
De la función posición en el tiempo, las *ecuaciones paramétricas* son de lectura directa:

$$x(t) = t - 1 \quad ; \quad y(t) = t + 2$$

Despejando t de la primera, e introduciendo ese despeje en la segunda:

$$t = x + 1 \quad ; \qquad y(x) = x + 1 + 2 = x + 3$$

Esta última ecuación y=x+3 es la *ecuación de la trayectoria* (no lleva el tiempo). En este caso, la función lineal y=f(x) que nos queda, indica claramente que el movimiento es una recta (movimiento rectilíneo) en el plano XY. Si graficamos:



Para saber dónde empieza el movimiento y hacia donde se mueve, será necesario usar el tiempo como parámetro, desde t=0 en adelante, y las funciones paramétricas:

$x(0) = [\ t - 1]_{t=0} = 0 - 1 = -1$ $\qquad$ $y(0) = [\ t + 2]_{t=0} = 0 + 2 = 2$

Lo que indica que el móvil empieza su movimiento en el punto (–1; 2), y su posición inicial es:

$$\vec{r}(0) = -\breve{\imath} + 2\,\breve{\jmath}$$

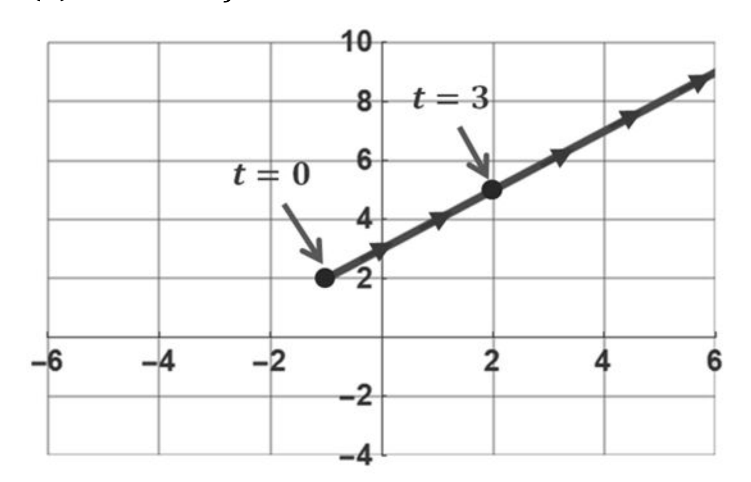
Para saber hacia donde se mueve, tomamos otro instante posterior, por ej t=3:

$x(3) = [\ t - 1]_{t=3} = 3 - 1 = 2$ $\qquad$ $y(3) = [\ t + 2]_{t=3} = 3 + 2 = 5$

La posición en t=3 es:

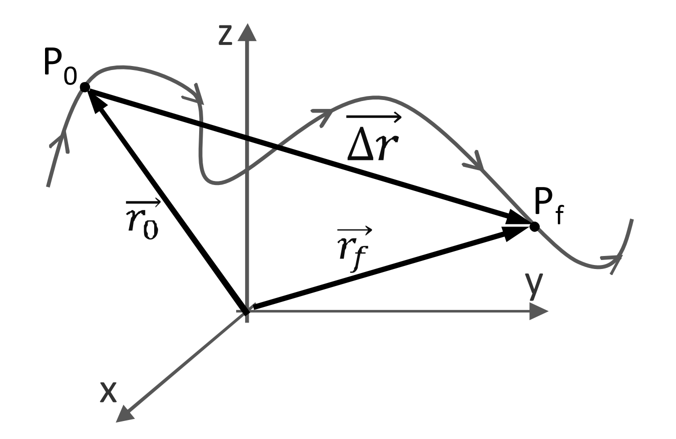
$$\vec{r}(3) = 2\,\breve{\imath} + 5\,\breve{\jmath}$$

Entonces en t=3 el móvil estará en el punto (2; 5), por lo tanto ya sabemos para donde se mueve, e incluso podemos graficar el movimiento colocando flechas sobre la trayectoria:



13.6 Desplazamiento

El desplazamiento $\Delta\vec{r}$ es la **diferencia vectorial** entre posición final y posición inicial de la partícula. Matemáticamente, es lo que ya hemos visto en el capítulo correspondiente a vectores, como vector entre dos puntos, según se muestra a continuación:



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_0$$

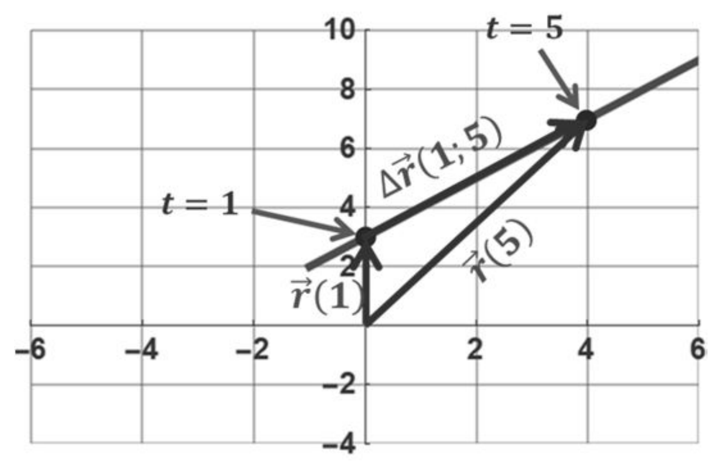
Vector desplazamiento

Ej. N°6: para la partícula del Ej. N°5, hallar y graficar su vector desplazamiento entre los instantes t=1 y t=5, y también las distancias al origen en dichos instantes.

$$\vec{r}(1) = (1 - 1)\,\check{\imath} + (1 + 2)\,\check{\jmath} = 3\,\check{\jmath}$$

$$\vec{r}(5) = (5 - 1)\,\check{\imath} + (5 + 2)\,\check{\jmath} = 4\,\check{\imath} + 7\,\check{\jmath}$$

$$\Delta\vec{r}(1;5) = \vec{r}(5) - \vec{r}(1) = 4\,\check{\imath} + 4\,\check{\jmath}$$

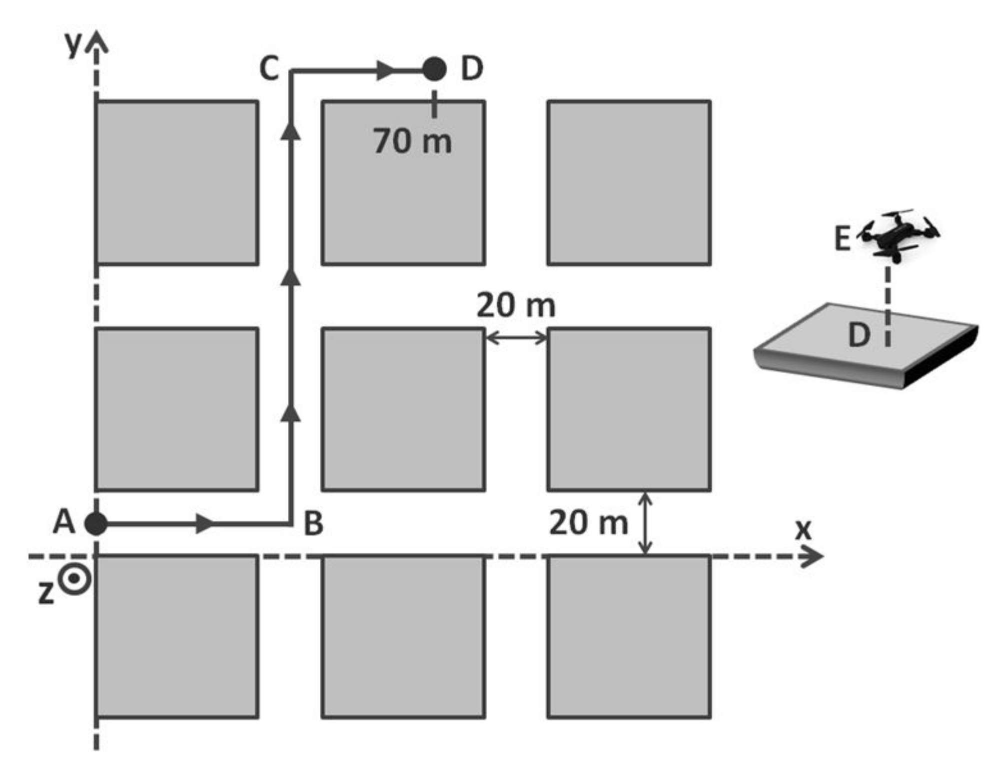


La distancia al origen es el módulo de la posición:

$$|\vec{r}(1)| = |3\,\check{\jmath}| = 3$$

$$|\vec{r}(5)| = |4\,\check{\imath} + 4\,\check{\jmath}| = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

Ej. N°7: Supongamos un dron que es llevado desde el punto A hasta el punto E, por la zona central de todas las calles, estando el punto E a 75m de altura desde el punto D, posición desde donde tomará imágenes. Las manzanas tienen 100m por lado.



Hemos puesto el SC: XYZ como muestra la figura, para determinar coordenadas y posiciones. El móvil inicia su recorrido en la posición A:

$$\vec{r}(A) = 10\,m\,\check{\jmath}$$

Luego avanza según x hasta la posición B:

$$\vec{r}(B) = 10\,m\,\check{j} + 110\,m\,\check{i}$$

Luego avanza según y hasta la posición C:

$$\vec{r}(C) = 250\,m\,\check{j} + 110\,m\,\check{i}$$

Luego avanza según x un tramo más, hasta la posición D:

$$\vec{r}(D) = 250\,m\,\check{j} + 190\,m\,\check{i}$$

Luego asciende hasta la posición E:

$$\vec{r}(E) = 250\,m\,\check{j} + 190\,m\,\check{i} + 75\,m\,\check{k}$$

Esta será la posición final del dron, desde donde filmará.

Calculemos la distancia desde el origen de coordenadas O, hasta el punto D. Como ya sabemos, eso será el módulo de la posición de dicho punto, no necesitamos hacer triángulos:

$$\overline{OD} = |\vec{r}(D)| = \left|250\,m\,\check{j} + 190\,m\,\check{i}\right| = \sqrt{250^2 + 190^2} = 314\,m$$

¿Cuál sería la distancia recorrida por el dron? Eso sería la distancia desde A hasta E. Como las trayectorias son todas rectilíneas:

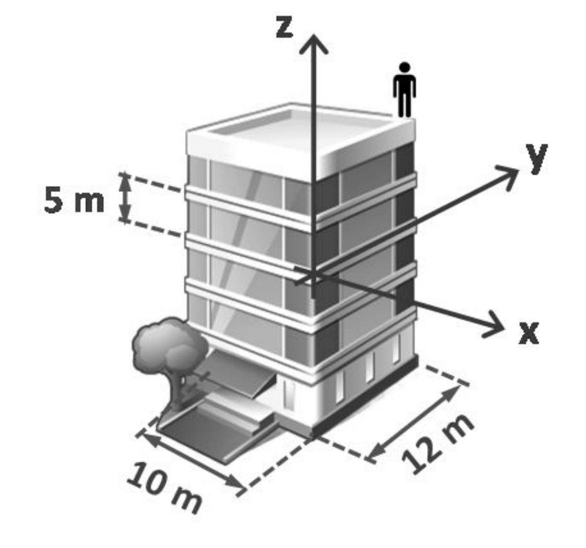
$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = 110\,m + 240\,m + 80\,m + 75\,m = 505\,m$$

Calculemos también el desplazamiento desde A hasta E, eso será según vimos:

$$\Delta\vec{r}(AE) = \vec{r}(E) - \vec{r}(A) = \left(250\,m\,\check{j} + 190\,m\,\check{i} + 75\,m\,\check{k}\right) - 10\,m\,\check{j}$$

$$\Delta\vec{r}(AE) = 240\,m\,\check{j} + 190\,m\,\check{i} + 75\,m\,\check{k}$$

<ins>Ej. N°8</ins>: En el siguiente edificio, una persona está parada en el borde de la terraza. Hemos puesto un sistema de coordenadas cartesianas en la base del 2°piso. Cada piso tiene 5m de altura, y hay un árbol a un lado de la entrada.



La persona está en la posición, respecto a nuestro sistema de coordenadas:

$$\vec{r}(p) = 10\,m\,\check{k} + 12\,m\,\check{j}$$

El árbol está en la posición:

$$\vec{r}(a) = -10\,m\,\check{i} - 15\,m\,\check{k}$$

Pero todo esto no nos dice qué tan rápido se mueve un cuerpo, para ello, necesitaremos definir:

13.7 Velocidad media e instantánea

El concepto general de velocidad, es **cuánto varía una determinada magnitud, en la unidad de tiempo**. Puede que estudiemos cuánto varía la posición en la unidad de tiempo, cuánto varía la temperatura en la unidad de tiempo, cuánto varía la presión en la unidad de tiempo. Si no se aclara, y hablamos de velocidad "a secas", estaremos hablando de cómo varía la posición.

La **velocidad media** es cuánto varía la posición en un determinado Δt, en promedio, sin importar lo que ocurrió en dicho intervalo. Es el desplazamiento sobre el Δt:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Ej. N°9: hallar la velocidad media del Ej. 5, en el intervalo (1;5) segundos:

$$\vec{v}_m(1;5) = \frac{\Delta\vec{r}(1;5)}{\Delta t(1;5)} = \frac{4\check{\imath} + 4\check{\jmath}}{4-0} = \frac{4\check{\imath}}{4} + \frac{4\check{\jmath}}{4} = \check{\imath} + \check{\jmath}$$

Ej. N°10: ídem anterior, en el intervalo (2;4) segundos:

$$\vec{v}_m(2;4) = \frac{\Delta\vec{r}(2;4)}{\Delta t(2;4)} = \frac{\vec{r}(4) - \vec{r}(2)}{4-2} =$$

$$\vec{v}_m(1;4) = \frac{(4-1)\check{\imath} + (4+2)\check{\jmath} - [(2-1)\check{\imath} + (2+2)\check{\jmath}]}{2} = \frac{2\check{\imath} + 2\check{\jmath}}{2} = \check{\imath} + \check{\jmath}$$

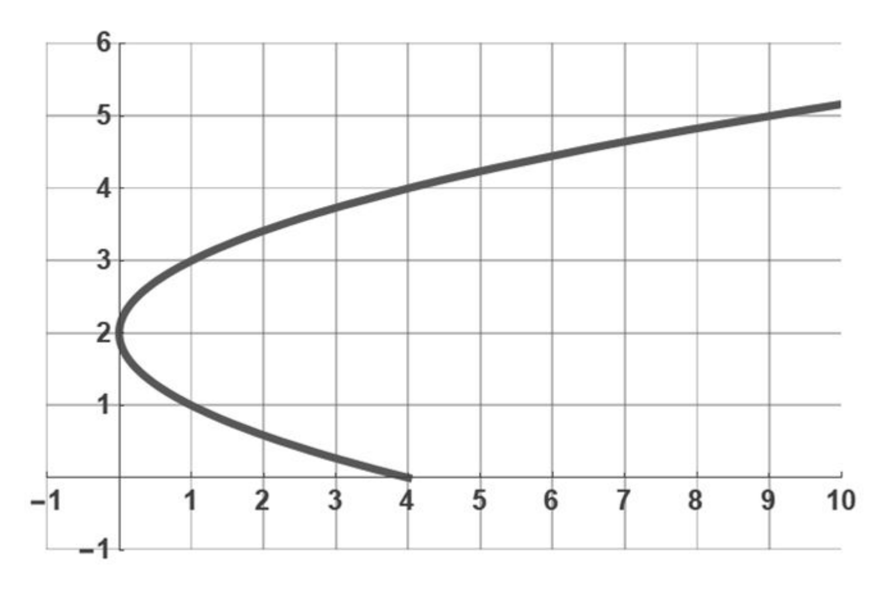
Y vemos que dio igual. ¿Podríamos haber sabido esto antes? ¿Será *constante* la velocidad en el Ej.5, sin importar el intervalo tomado? Volveremos sobre esto.

Ej. N°11: Sea el movimiento siguiente, dado en forma paramétrica:

$$x(t) = (t-2)^2$$

$$y(t) = t$$

Grafiquemos el movimiento:



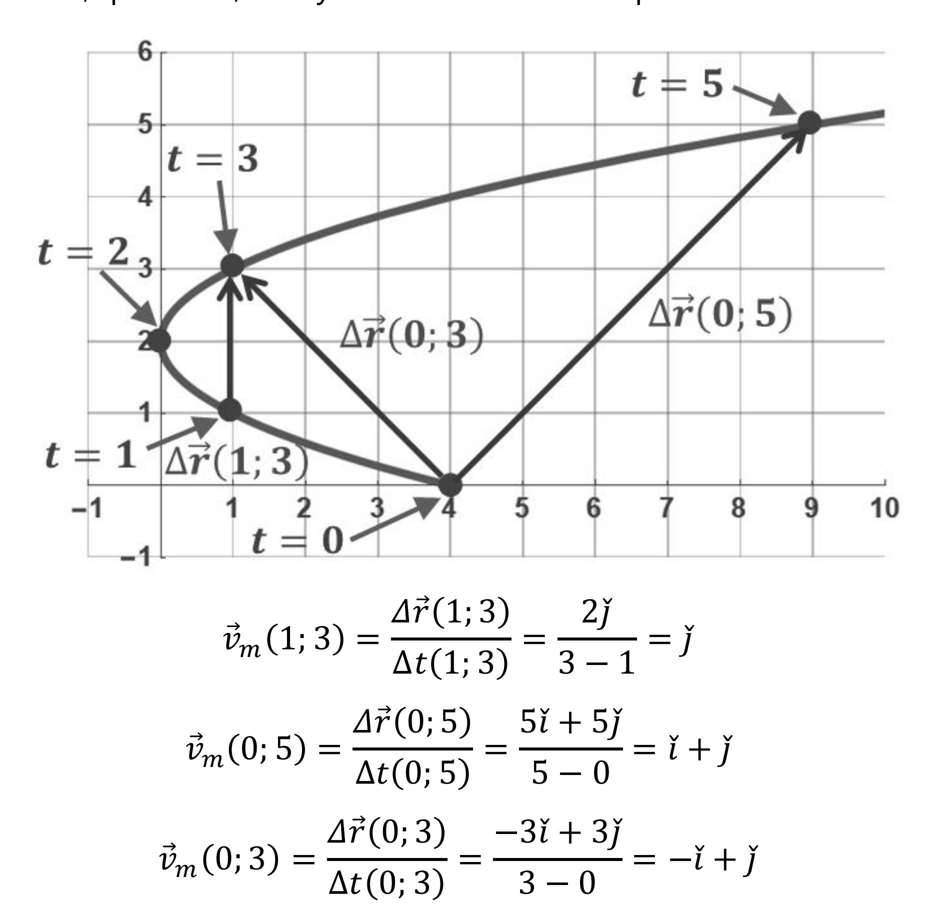
Hallemos algunas velocidades medias, para eso, habrá que calcular algunas posiciones:

$$\vec{r}(0) = (-2)^2\,\breve{\imath} + 0\breve{\jmath} = 4\breve{\imath}$$
$$\vec{r}(1) = (1-2)^2\,\breve{\imath} + \breve{\jmath} = \breve{\imath} + \breve{\jmath}$$
$$\vec{r}(3) = (3-2)^2\,\breve{\imath} + 3\breve{\jmath} = \breve{\imath} + 3\breve{\jmath}$$
$$\vec{r}(5) = (5-2)^2\,\breve{\imath} + 5\breve{\jmath} = 9\breve{\imath} + 5\breve{\jmath}$$

Y también desplazamientos:

$$\Delta\vec{r}(1;3) = \vec{r}(3) - \vec{r}(1) = \breve{\imath} + 3\breve{\jmath} - (\breve{\imath} + \breve{\jmath}) = 2\breve{\jmath}$$
$$\Delta\vec{r}(0;5) = \vec{r}(5) - \vec{r}(0) = 9\breve{\imath} + 5\breve{\jmath} - (4\breve{\imath}) = 5\breve{\imath} + 5\breve{\jmath}$$
$$\Delta\vec{r}(0;3) = \vec{r}(3) - \vec{r}(0) = \breve{\imath} + 3\breve{\jmath} - (4\breve{\imath}) = -3\breve{\imath} + 3\breve{\jmath}$$

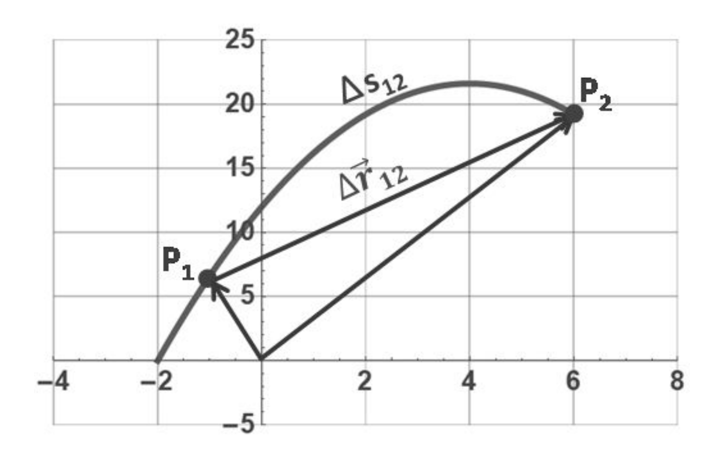
Lo que graficado, queda así, incluyendo también los desplazamientos calculados:



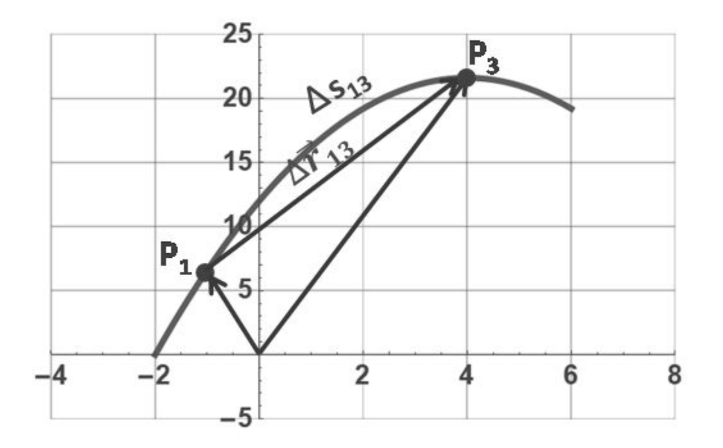
$$\vec{v}_m(1;3) = \frac{\Delta\vec{r}(1;3)}{\Delta t(1;3)} = \frac{2\breve{\jmath}}{3-1} = \breve{\jmath}$$
$$\vec{v}_m(0;5) = \frac{\Delta\vec{r}(0;5)}{\Delta t(0;5)} = \frac{5\breve{\imath} + 5\breve{\jmath}}{5-0} = \breve{\imath} + \breve{\jmath}$$
$$\vec{v}_m(0;3) = \frac{\Delta\vec{r}(0;3)}{\Delta t(0;3)} = \frac{-3\breve{\imath} + 3\breve{\jmath}}{3-0} = -\breve{\imath} + \breve{\jmath}$$

Donde vemos que todas las velocidades medias son distintas. Notemos también una conclusión importante, la velocidad está siempre en la misma dirección y sentido que el desplazamiento, no podría ser de otra manera pues el divisor Δt es un escalar, que será siempre positivo.

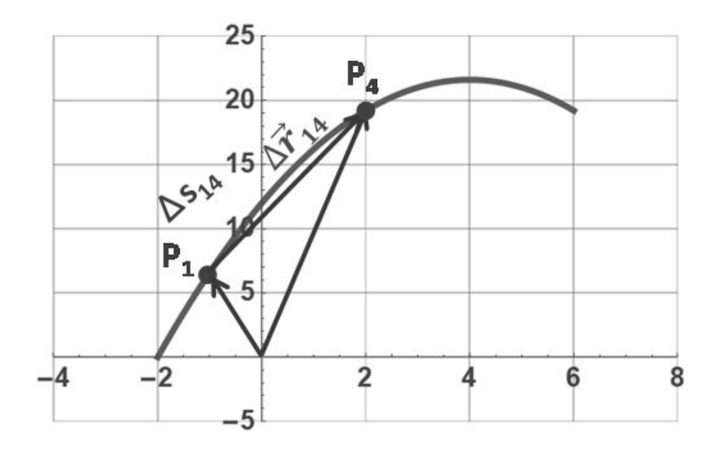
Para aproximarnos al concepto de **velocidad instantánea**, tomemos ahora un móvil que se mueve según la imagen siguiente, y dibujemos el vector desplazamiento desde un punto P_1 hasta un punto P_2, como muestra la imagen:



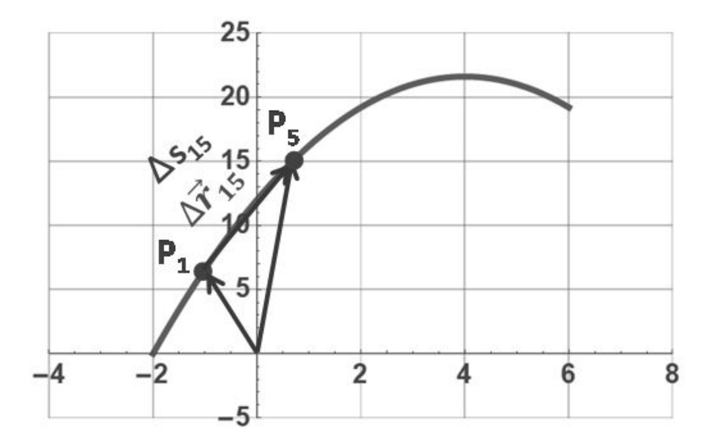
Dicho vector desplazamiento se dividirá por Δt para hallar la velocidad media entre P_1 y P_2. Si achicamos el Δt, el siguiente punto estará más cerca del P_1, y el error que cometemos por tomar $|\Delta\vec{r}|$ en lugar de tomar el arco recorrido Δs, será menor, para el cálculo de la velocidad media entre P_1 y P_3:



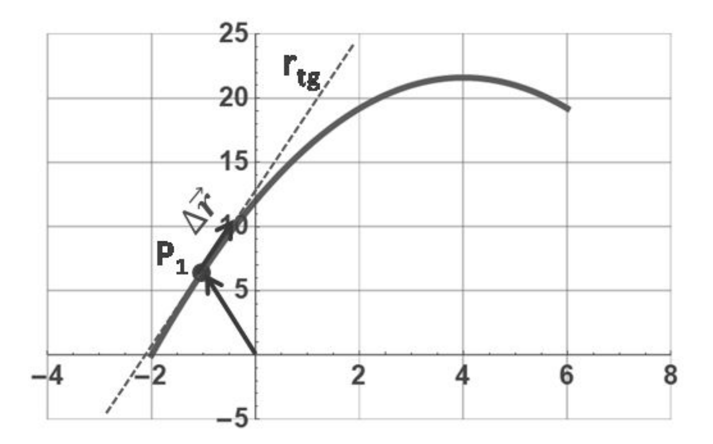
Si una vez más achicamos el Δt, nuevamente el nuevo punto P_4 estará más cerca del P_1, y el error que cometemos por tomar $|\Delta\vec{r}|$ en lugar de tomar el arco recorrido Δs, vuelve a ser menor, para el cálculo de la velocidad media entre P_1 y P_4:



Nuevamente achicamos el Δt, y otra vez el punto que ahora es P_5 estará más cerca del P_1, y el error que cometemos por tomar $|\Delta\vec{r}|$ en lugar de tomar el arco recorrido Δs, vuelve a ser menor, para el cálculo de la velocidad media entre P_1 y P_5:



Si continuamos achicamos el Δt, en el límite, cuando dicho Δt tiende a cero:



Y el cociente incremental de la velocidad media, se convierte en lo que llamamos **velocidad en el instante t**, ese límite es matemáticamente la *derivada de la posición respecto del tiempo*, es la definición de la velocidad instantánea, y se escribe:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Lo cual es más útil que la velocidad promedio, porque nos indica qué velocidad tenemos, instante a instante, sin error. **La velocidad es un vector**, y como tal:

- **Módulo.** El módulo de la velocidad se llama también *rapidez*. Es el equivalente al término inglés *speed*.
- **Dirección.** La dirección de la velocidad es la *recta tangente a la trayectoria*, porque es la dirección del desplazamiento $\Delta\vec{r}$, como muestra la imagen.
- **Sentido.** El sentido de la velocidad, es el sentido del movimiento, como lo evidencia que es el desplazamiento dividido por el escalar Δt.

Podemos escribir a la velocidad con sus componentes. Si bien a partir de ahora, por facilidad, trabajaremos en el plano XY, sepamos que todo, en este universo, transcurre en el espacio tridimensional, o sea en XYZ:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\check{\imath} + v_y(t)\,\check{\jmath}$$

13.8 Aceleración media e instantánea

Analizaremos la tercera magnitud de la cinemática básica, la aceleración. Vista desde la cinemática, la aceleración es la *velocidad con que varía la velocidad*. La **aceleración media** indica cuánto varía la velocidad en un determinado Δt, en promedio, sin importar lo que ocurrió en dicho intervalo:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Ej. N°12: hallar la aceleración media en el intervalo (2;3) de la partícula que se mueve con velocidad en el tiempo según la siguiente función vectorial:

$$\vec{v}(t) = -7\check{i} + 6t\,\check{j}$$

Sólo tenemos que aplicar lo visto anteriormente, es decir calcular las velocidades en ambos instantes, armar la variación de la velocidad, y dividirla por Δt.

$$\Delta\vec{v}(2;3) = \vec{v}(3) - \vec{v}(2) = -7\check{i} + 18\check{j} - (-7\check{i} + 12\check{j}) = 6\check{j}$$

Por lo tanto la aceleración media es:

$$\vec{a}_m(2;3) = \frac{\Delta\vec{v}(2;3)}{\Delta t} = \frac{6\check{j}}{3-2} = 6\check{j}$$

De la misma manera que hemos hecho para aproximarnos a la velocidad instantánea, podemos generar el concepto de **aceleración instantánea en un instante t**, la cual será el límite del cociente incremental, cuando el denominador Δt tiende a cero:

$$\vec{a}\,(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Lo que matemáticamente es la derivada de la velocidad, respecto del tiempo.

Resumiendo, posición, velocidad, y aceleración se relacionan de la siguiente manera:

EXPRESIONES DEL MOVIMIENTO

1) Posición en función del tiempo

$\vec{r}(t)$ vector en el espacio

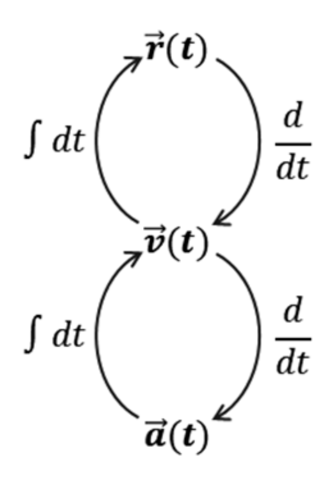
2) Ecuaciones paramétricas

$x(t)$, $y(t)$ } funciones del parámetro t

3) Ecuación de la trayectoria

$y = f(x)$ relación matemática xy (sin el tiempo)

RELACIONES ENTRE LAS MAGNITUDES

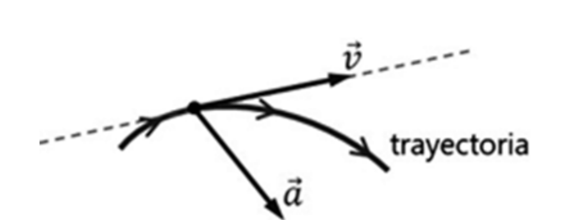


Agreguemos un par de ideas, que *no son parte de la cinemática*, pero te ayudarán a entender mejor la aceleración. Se trata de la segunda Ley de Newton[10]. Ella relaciona las *causas* del cambio en el movimiento (las fuerzas), con sus *consecuencias* (la aceleración):

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

Vemos en ella que la aceleración es un vector *proporcional* a la fuerza aplicada, es decir está siempre en la misma dirección y sentido de la fuerza, y su módulo es el módulo de la fuerza multiplicado por la masa. En otras palabras, si un cuerpo experimenta una aceleración, es porque recibe una fuerza aplicada. Esto también nos indica que, si bien la velocidad siempre está relacionada con el movimiento y la trayectoria, la aceleración, en cambio, *impone cambios en el movimiento y la trayectoria*. Esto es lógico, porque son las fuerzas las que imponen los cambios en el movimiento. Si un compañero nos tira un centro, cuando estamos en el área, y pateamos la pelota que viene volando, le estamos aplicando una fuerza, por lo tanto sufrirá una aceleración impuesta por dicha fuerza. A la aceleración nada le importa la trayectoria anterior.





aceleración que modifica la trayectoria

Para comprender cómo son esos cambios, y cómo será la nueva velocidad y posición, estudiaremos los tipos de movimientos.

13.9 Tipos de movimientos

La trayectoria que describe una partícula puede ser rectilínea, o curvilínea. Veremos algunos casos de movimientos, y los modelos matemáticos que describen posición, velocidad, y aceleración para ellos.

13.9.1 MRU

Una partícula se mueve en **MRU (movimiento rectilíneo uniforme)** cuando tiene velocidad constante, no nula, recordando que la velocidad es un vector, es decir todas las características de la velocidad (módulo, dirección, y sentido) deben mantenerse constantes. Eso hace variar la posición en forma uniforme en el tiempo, al ritmo de la velocidad.

[10] La 2° Ley de Newton es llamada también "ley fundamental de la dinámica".



$$\boldsymbol{\vec{v} = \overrightarrow{cte}}$$

⇩

consecuencias

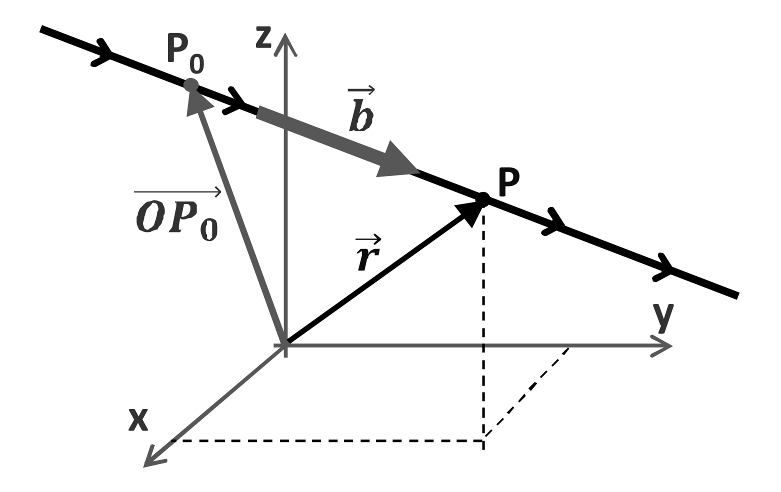
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{r} = \int \vec{v}\ dt = \vec{v}\,t + \vec{r}_0$$

Agregamos un concepto de *dinámica*: si la aceleración es nula, quiere decir que, por 2° Ley de Newton, este movimiento no necesita ninguna fuerza neta aplicada:

$$\vec{a} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\,\vec{a} = \vec{0}$$

Grafiquemos una partícula moviéndose en MRU en el espacio:



Para obtener la ecuación de la recta que recorre la partícula, necesitamos saber la *posición de un punto P_0* de la recta, es decir el vector $\overrightarrow{OP_0}$. También necesitamos conocer un vector director de la recta, es decir un *vector director* $\vec{b}$ cuya dirección es la dirección del movimiento, y su sentido es el del movimiento. Conocidos ellos, podemos generar las posiciones de todos los infinitos puntos P de la trayectoria, simplemente multiplicando el vector director por un parámetro λ.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\,\vec{b}$$

Esto también puede verse como una función vectorial (el vector posición) de una variable real λ (el parámetro):

$$\vec{r}(\lambda) = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\,\vec{b}$$

Y si este movimiento rectilíneo es un MRU, el primer término puede ser el vector posición de un punto conocido P_0, y el segundo, el que toma como vector director de la

recta a la velocidad, y como parámetro, al tiempo, por lo tanto:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{r_0} + t\,\vec{v}$$

Otra forma de hallar el vector posición, es integrando una velocidad que sabemos es constante:

$$\vec{v}(t) = \overrightarrow{cte} = \vec{v}$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}\,dt = \vec{v} \int dt = \vec{v}\ t + \vec{c}$$

La constante de integración $\vec{c}$ nos da un punto del resultado, es decir el vector posición de un punto conocido de la recta P_0 :

$$\vec{r}(t) = \vec{v}\ t + \vec{c} = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t$$

Luego la aceleración es la derivada de la velocidad: $\vec{a} = 0$

<u>Ej. N°13</u>: Un móvil se mueve con 2 m/s hacia el este. Como la velocidad es constante, es un MRU. Luego, la posición será:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t = \vec{r}_0 + 2\frac{m}{s}\check{\imath}\,t$$

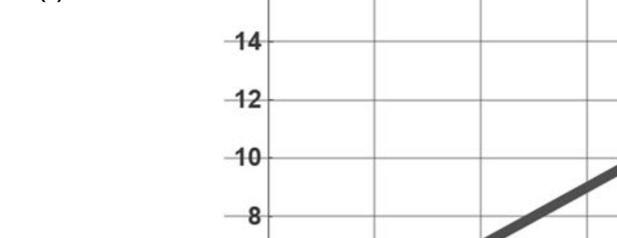
Si, además, conocemos una posición inicial del móvil, es decir por ej. $\vec{r}_0 = 3\,m\,\check{\imath}$ entonces, tenemos todo lo necesario para escribir la posición en todo instante:

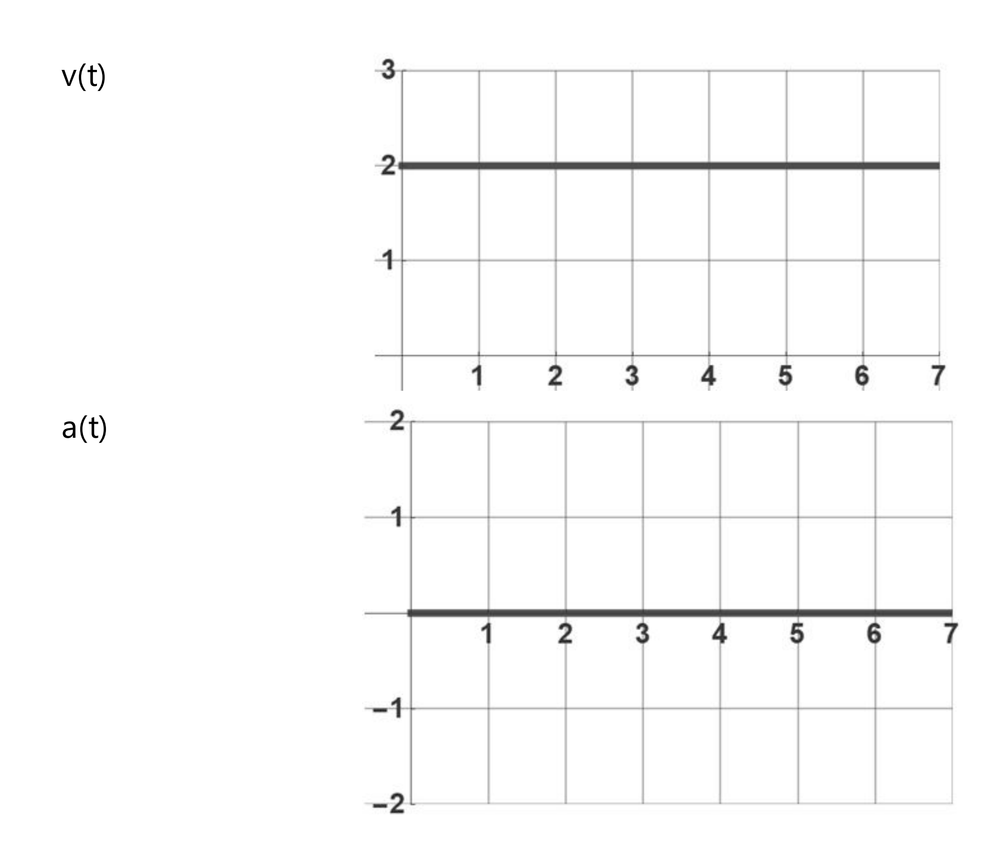
$$\vec{r}(t) = 3m\,\check{\imath} + 2\frac{m}{s}\check{\imath}\,t$$

Acá vemos con toda claridad que, matemáticamente, t es el *parámetro*, la velocidad es el *vector director* de la recta, y la posición inicial es el *punto conocido* P_0 de la trayectoria. Vemos también, que la posición, en este ejemplo, se desarrolla todo el tiempo en el eje x, por lo tanto también podemos escribir:

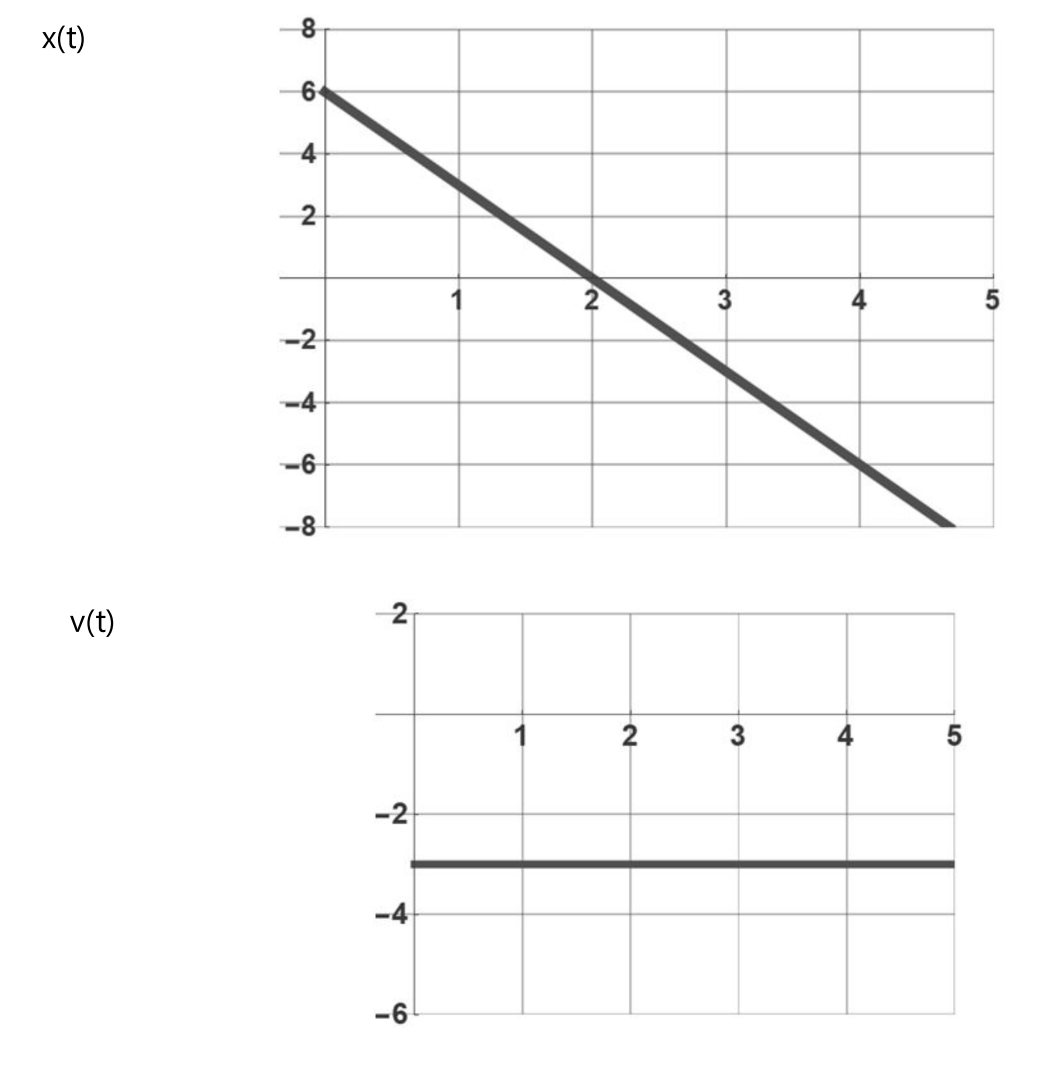
$$\vec{r}(t) = x(t)\,\check{\imath} = (x_0 + v\,t)\,\check{\imath} = (3m + 2\frac{m}{s}t)\,\check{\imath}$$

Y entonces podemos graficar la funciones escalares del tiempo x(t), v(t) y a(t):

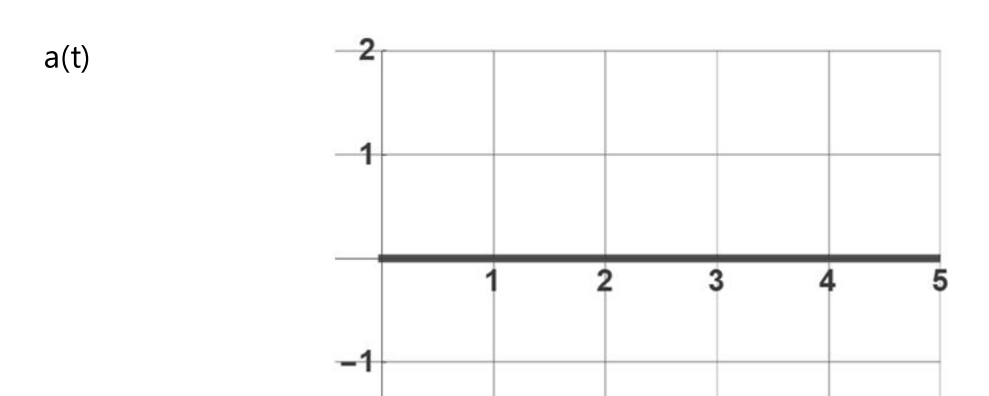




Ej. N°14: Un móvil tiene $\vec{r}(t) = 6m\,\check{\imath} - 3\;m/s\;\check{\imath}\;t$, lo que como sabemos se puede escribir $\vec{r}(t) = x(t)\;\check{\imath}$, entonces graficando la función escalar x(t) = 6 m – 3 m/s t:



a(t)



Ej. N°15: Retomando el ejemplo N°5 anterior, donde una partícula se movía en el plano XY, con posición variable en el tiempo:

$$\vec{r}(t) = (t - 1)\, \breve{\imath} + (t + 2)\, \breve{\jmath}$$

Podemos redistribuír los paréntesis de la siguiente manera:

$$\vec{r}(t) = t\, \breve{\imath} - \breve{\imath} + t\, \breve{\jmath} + 2\, \breve{\jmath}$$

Y de ahí separar lo que es constante respecto de lo que varía en el tiempo:

$$\vec{r}(t) = t\, (\breve{\imath} + \breve{\jmath}) - \breve{\imath} + 2\, \breve{\jmath}$$

Y esto coincide con la ecuación vectorial de la posición para el MRU: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\, t$

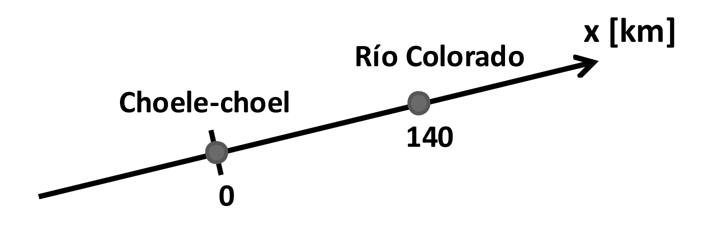
Vemos entonces que se trata de un MRU y la velocidad es la que habíamos calculado para dos intervalos distintos, y tiene que dar igual, como dio, porque es constante.

Ej. N°16: La ruta 22 en la provincia de Río Negro tiene un tramo recto de 140 km.



Un auto A se mueve, partiendo desde Choele-choel hacia Río Colorado, con una rapidez constante de 100 km/h, mientras otro auto B, salió en el mismo instante de Río Colorado, en dirección contraria, a 60 km/h. ¿En qué posición se encuentran?

Para trabajar en esta consigna, necesitamos definir dónde y cómo ponemos un sistema de coordenadas. Lo más práctico, en un movimiento rectilíneo, es alinear un eje con el movimiento, por ejemplo:



Ya podemos ahora escribir las ecuaciones del movimiento, que siempre son tres:

auto A : MRU	auto B : MRU
$\vec{v}_A = 100\dfrac{km}{h}\ \check{\imath}$	$\vec{v}_B = -\,60\dfrac{km}{h}\ \check{\imath}$
$\vec{r}_A = 100\dfrac{km}{h}\ t\ \check{\imath}$	$\vec{r}_B = 140\ km\ \check{\imath} - 60\dfrac{km}{h}\ t\ \check{\imath}$
$\vec{a}_A = \vec{0}$	$\vec{a}_B = \vec{0}$

En el instante del encuentro, que llamaremos t_E, las posiciones serán:

$$\vec{r}_A(t_E) = 100\frac{km}{h}\ t_E\ \check{\imath}$$

$$\vec{r}_B(t_E) = 140\ km\ \check{\imath} - 60\frac{km}{h}\ t_E\ \check{\imath}$$

Y por supuesto, estas posiciones deberán ser coincidentes en ese instante:

$$\vec{r}_A(t_E) = \vec{r}_B(t_E)$$

$$100\frac{km}{h}\ t_E\ \check{\imath} = 140\ km\ \check{\imath} - 60\frac{km}{h}\ t_E\ \check{\imath}$$

Y hemos llegado a la ecuación que hay que resolver, para hallar la incógnita t_E. Vemos en ella, que todo está en el versor $\check{\imath}$, por lo tanto podemos escribir:

$$100\frac{km}{h}\ t_E\ \check{\imath} = \left(140\ km\ - 60\frac{km}{h}\ t_E\right)\ \check{\imath}$$

Por lo tanto, para que los vectores a ambos lados de la ecuación sean iguales, los escalares deben ser iguales:

$$100\frac{km}{h}\ t_E = 140\ km\ - 60\frac{km}{h}\ t_E$$

Debemos tener cuidado de no mezclar unidades. En este ejemplo no habría problema porque todas las longitudes están en km, y todos los tiempos están en horas, por lo tanto t_E también va a estar en horas. Otra consideración es que cuando manejamos mismas unidades, podemos escribir las ecuaciones sin ellas, por ejemplo:

$$100\ t_E = 140 - 60\ t_E$$

De lo cual t_E = 0,875 h = 52min 30seg. Obtengamos también cuál es la posición del encuentro, por ejemplo usando la posición del auto A:

$$\vec{r}_A(t_E) = 100\frac{km}{h}\ 0{,}875\ h\ \check{\imath} = 87{,}5\ km\ \check{\imath}$$

Y también calculemos cuál es la distancia recorrida por el auto B, dicha distancia será el módulo de su vector desplazamiento:

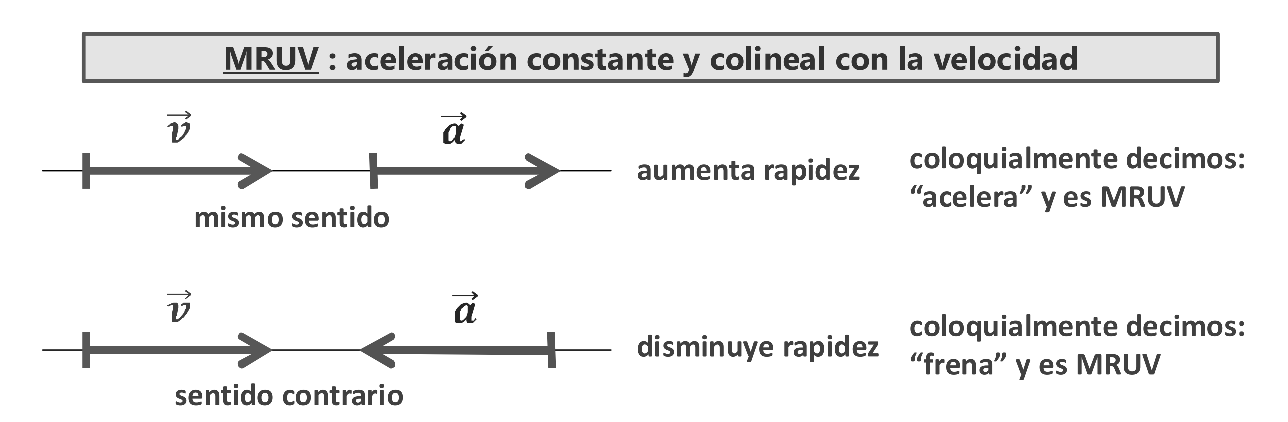
$$|\Delta\vec{r}_B| = |\vec{r}_B(t_E) - \vec{r}_B(0)| = |87{,}5\ km\ \check{\imath} - 140\ km\ \check{\imath}| = 52{,}5\ km$$

Para pensar un poco más:

1) ¿Se podría haber elegido un eje x con el cero en Río Colorado, y positivo apuntando hacia Choele-choel? ¿Podrían dar distintos los resultados?
2) ¿Se podrían haber planteado, exclusivamente, ecuaciones escalares?
3) ¿Se podrían haber escrito las velocidades en metros / segundo?

13.9.2 MRUV

Una partícula se mueve en **MRUV (movimiento rectilíneo uniformemente variado)** cuando se dan dos condiciones, 1) el movimiento tiene aceleración constante, 2) la trayectoria está alineada con dicha aceleración, o dicho de otra manera, la aceleración es colineal con la velocidad[11]. Esta última condición es sumamente importante, ya que aceleración constante no garantiza trayectoria rectilínea[12].



Integrando la aceleración que sabemos en MRUV es constante:

$$\vec{a}(t) = \overrightarrow{cte} = \vec{a}$$

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}\, dt = \vec{a} \int dt = \vec{a}\ t + \vec{c}$$

La constante de integración $\vec{c}$ nos da un punto del resultado, es decir la velocidad en un instante conocido:

$$\vec{v}(t) = \vec{a}\ t + \vec{c} = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t$$

Repitiendo para hallar la posición:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}\, dt = \int (\vec{v}_0 + \vec{a}\, t)\, dt = \vec{v}_0\, t + \vec{a}\ \frac{t^2}{2} + \vec{c}$$

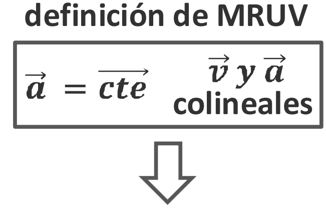
La nueva constante de integración $\vec{c}$ nos da un punto del resultado, es decir la posición en un instante conocido:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0\, t + \vec{a}\ \frac{t^2}{2} + \vec{r}_0$$

[11] Simulación web del MRUV. https://www.walter-fendt.de/html5/phes/acceleration_es.htm

[12] Diremos más sobre esto, cuando veamos *tiro oblicuo (TO).*

Como velocidad y aceleración son colineales, la posición también lo será:



consecuencias

$$\vec{v} = \int \vec{a}\ dt = \vec{a}\, t + \vec{v}_0$$

$$\vec{r} = \int \vec{v}\ dt = \vec{a}\, \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0\, t + \vec{r}_0$$

Como el MRUV ocurre con velocidad y aceleración colineales, podríamos colocar un eje sobre ambas, por ejemplo el eje x; entonces las ecuaciones de arriba quedan:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\ t = v(t)\ \breve{\imath}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\ t + \frac{1}{2}\vec{a}\ t^2 = x(t)\ \breve{\imath}$$

Tomando las funciones escalares: (1) $v(t) = v_0 + a\ t$

(2) $x(t) = x_0 + v_0\ t + \frac{1}{2} a\ t^2$

Despejando t de la ecuación (1): (3) $t = \dfrac{v(t) - v_0}{a}$

Reemplazando la (3) en la (2): (4) $v(t)^2 - {v_0}^2 = 2\ a\ \Delta x$

Recordando que: $\Delta x = x(t) - x_0$ es la variación de la posición en x

Ej. N°17: Cuando el semáforo se pone en verde, un camión arranca desde el reposo, en forma rectilínea. Lo hace con aceleración (módulo) de 2 m/s^2. Escribamos las ecuaciones del movimiento, es decir velocidad, aceleración y posición. Asumiremos para ellas un eje x > 0 en el sentido del movimiento, con x=0 en el punto donde está el auto.

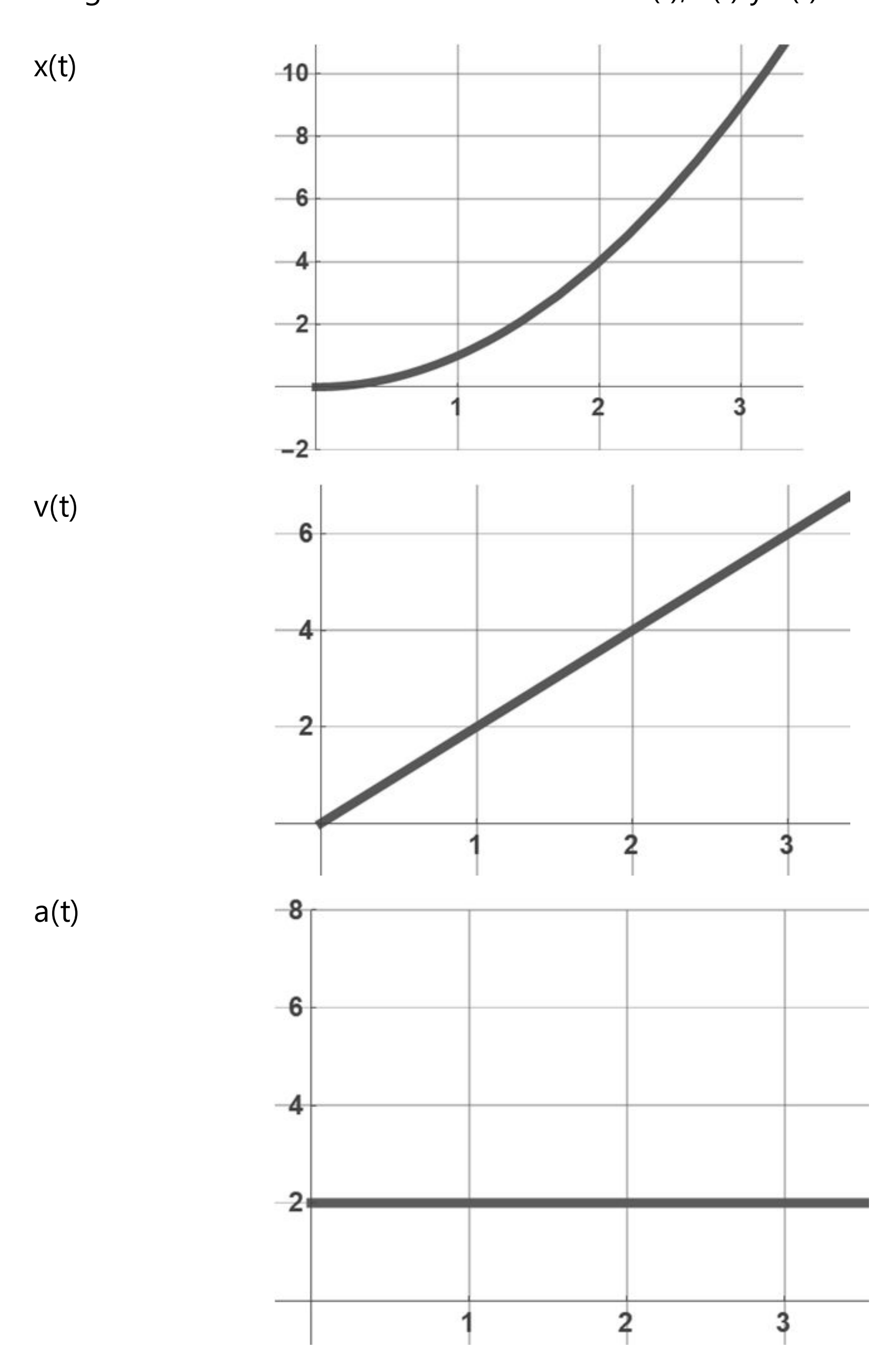
camión : MRUV

$$\vec{r}(t) = 1\frac{m}{s^2}\ t^2\ \breve{\imath}$$

$$\vec{v}(t) = 2\frac{m}{s^2}\ t\ \breve{\imath}$$

$$\vec{a}\ = 2\frac{m}{s^2}\ \breve{\imath}$$

Podemos graficar también las funciones escalares r(t), v(t) y a(t).



Hagamos algunos cálculos, ¿en qué posición y con qué velocidad estará el móvil a los 3 seg? Eso se hace colocando t=3 seg en las ecuaciones, todas dependientes del tiempo:

$$\vec{r}(3) = 1\frac{m}{s^2}\,(3\,seg)^2\,\breve{\imath} = 9\,m\,\breve{\imath}$$

$$\vec{v}(3) = 2\frac{m}{s^2}\,3\,seg\,\breve{\imath} = 6\frac{m}{s}\,\breve{\imath}$$

Notemos que acá se dio el caso que aceleración y velocidad tienen el mismo sentido, por lo tanto la aceleración hace aumentar la rapidez, siempre.

<u>Ej. N°18</u>: Un auto que viene avanzando por la calle a 36 km/h, aplica los frenos porque ve que el semáforo está en rojo, logrando detenerse a los 54 m de aplicarlos. Se trata de un

MRUV, y como un MRUV es siempre rectilíneo (la "R" es de rectilíneo) se acepta escribir las ecuaciones escalares para los cálculos, a menos por supuesto que nos exijan escribir las vectoriales. Colocando el movimiento en el eje x, y asumiendo x=0 donde se encuentra el auto, y x>0 en el sentido del movimiento, escribimos:

auto : MRUV

$$x(t) = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2} a\, t^2 = 36\frac{m}{s} t + \frac{1}{2} a\, t^2$$

$$v(t) = v_0\,(t) + a\, t = 36\frac{m}{s} + a\, t$$

$$a = ?$$

Nos conviene hallar la aceleración, porque con ella podremos escribir las ecuaciones completas, en función del tiempo, y con ellas, podremos hallar cualquier cosa. Pero sería complicado despejarla de las x(t) y v(t), nos viene muy cómoda la ecuación (4):

$$v(t)^2 - {v_0}^2 = 2\, a\, \Delta x$$

La velocidad final es cero (auto detenido en el semáforo), la inicial es dato, y la distancia recorrida es dato también, reemplazando:

$$0 - \left(36\frac{m}{s}\right)^2 = 2\, a\, 54\, m \quad \Rightarrow \quad a = -12\, m/s^2$$

Pero ese valor numérico es el valor escalar correspondiente a la proyección sobre el eje x, la aceleración es: $\vec{a} = -12\frac{m}{s^2}\, \breve{\imath}$

<u>Ej. N°19</u>: Un auto A arranca desde la Ciudad de Buenos Aires, avanzando en línea recta hacia la Ciudad de La Plata, mientras que otro auto B arranca en sentido inverso, desde La Plata hacia Buenos Aires. Asumimos que todo el trayecto es en línea recta, y que la distancia entre las ciudades es 60 km. El auto A, acelera con módulo 2 m/s^2 durante 15 segundos, manteniendo luego la velocidad adquirida. El auto B, acelera con 4 m/s^2 durante 5 segundos, manteniendo luego la velocidad constante. Escribir las ecuaciones escalares de posición, velocidad, y aceleración, colocando un eje x>0 desde Buenos Aires hacia La Plata, con x=0 en el punto desde donde parte A. Es válido y aceptable (y eso haremos para facilidad) escribir las ecuaciones SIN LAS UNIDADES mientras hacemos cálculos, siempre que estemos usando en ellas LAS UNIDADES DEL SISTEMA.

Auto A:	0→15 seg: MRUV	15 seg → ∞: MRU
	$x_A = t^2$	$x_A = 225 + 30\,(t - 15)$
	$v_A = 2\,t$	$v_A = 30$
	$a_A = 2$	$a_A = 0$

Auto B:

0→5 seg: MRUV	5 seg → ∞: MRU
$x_B = 60000 - 2\,t^2$	$x_B = 59950 - 20\,(t - 5)$
$v_B = -4\,t$	$v_B = -20$
$a_B = -4$	$a_B = 0$

Llevó un poco de trabajo escribir todas las ecuaciones, ¿verdad? Pues es tiempo bien invertido, pues teniendo todas las ecuaciones, podremos hallar cualquier cosa que nos propongamos. El problema queda reducido a un problema matemático. Veamos por ejemplo en qué posición escalar estarán ambos móviles, transcurridos 5 minutos:

$$x_A(600\,seg) = 225 + 30\,(600 - 15) = 17775\,m$$

$$x_B(600\,seg) = 59950 - 20\,(600 - 5) = 48050\,m$$

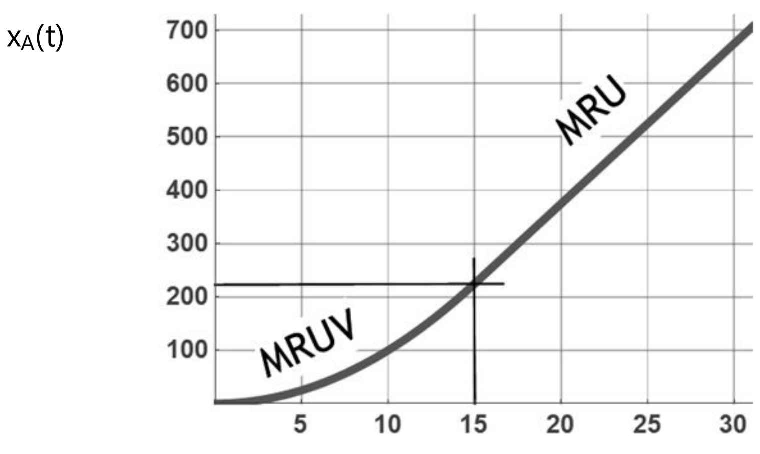
Naturalmente, también quisiéramos saber en qué momento y posición se dará el encuentro. Hallemos ambas cosas:

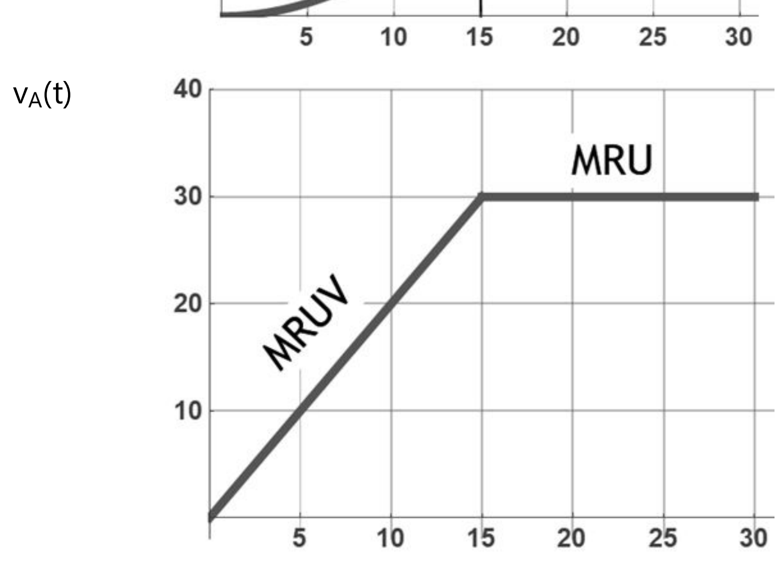
$$x_A(t_E) = x_B(t_E)$$

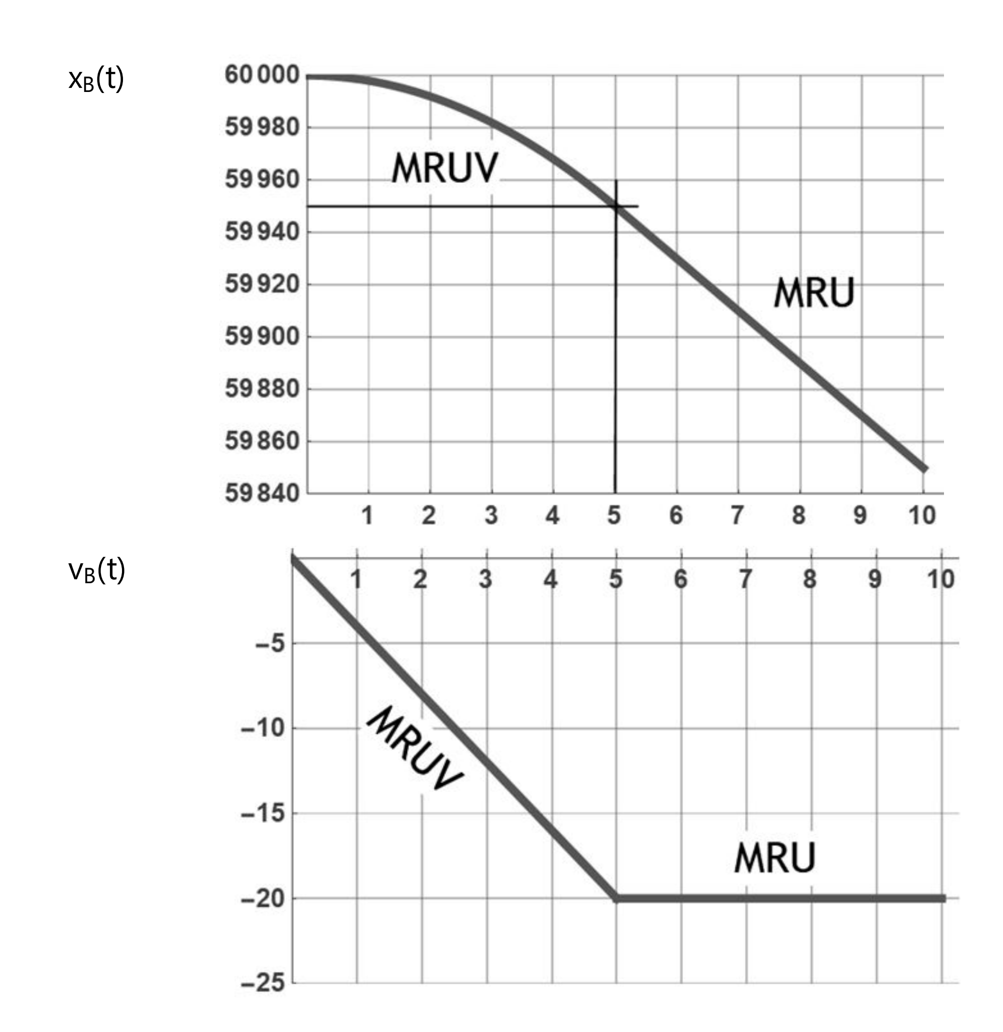
$$225 + 30\,(t_E - 15) = 59950 - 20\,(t_E - 5)$$

Es muy sencillo resolver esta ecuación de primer grado con una sola incógnita, ¿podrás resolverla vos? La solución es: t_E = 1205,5 seg = 20 min 5,5 seg luego x_E = 35940 m.

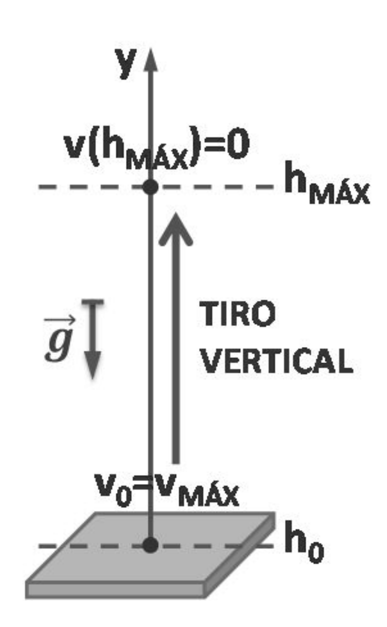
Grafiquemos las funciones posición y velocidad para ambos autos.







13.9.3 TV



Un *caso particular de MRUV*, llamado **TV (tiro vertical)**, se da cuando una partícula es lanzada verticalmente hacia arriba, desde una altura inicial, y como consecuencia de ello, vuela en un movimiento de ascenso respecto de la Tierra.

Al ser lanzado hacia arriba, tiene inicialmente una velocidad máxima. Durante su vuelo, la Tierra le ejerce la fuerza peso, y la aceleración de la gravedad $\vec{g}$, que frenan su ascenso, llegando a la altura máxima, donde la velocidad es cero y termina su ascenso.

El movimiento es un MRUV del tipo "frenando – aceleración y velocidad contrarias", y ya sabemos el tratamiento matemático de este movimiento.

Las ecuaciones son las ya vistas (MRUV) sólo que en el eje vertical (donde g=9,8 m/s^2):

TV

$$\vec{r}(t) = \left(y_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2\right) \check{j} \qquad \vec{v}(t) = (v_0 + \vec{g}\, t)\, \check{j} \qquad \vec{a} = \vec{g} = -g\, \check{j}$$

Como todo ocurre en un solo eje, podemos escribir y analizar las funciones escalares:

TV: eje y>0 hacia arriba	La función es:
$y(t) = y_0 + v_0\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$	parábola vertical concavidad negativa, eje de simetría en $t_{hmáx}$
$v(t) = v_0 - g\, t$	recta decreciente hasta v=0
$a = -g = -9{,}8\, m/s^2$	constante

Al llegar a la posición de altura máxima (velocidad cero) termina el ascenso:

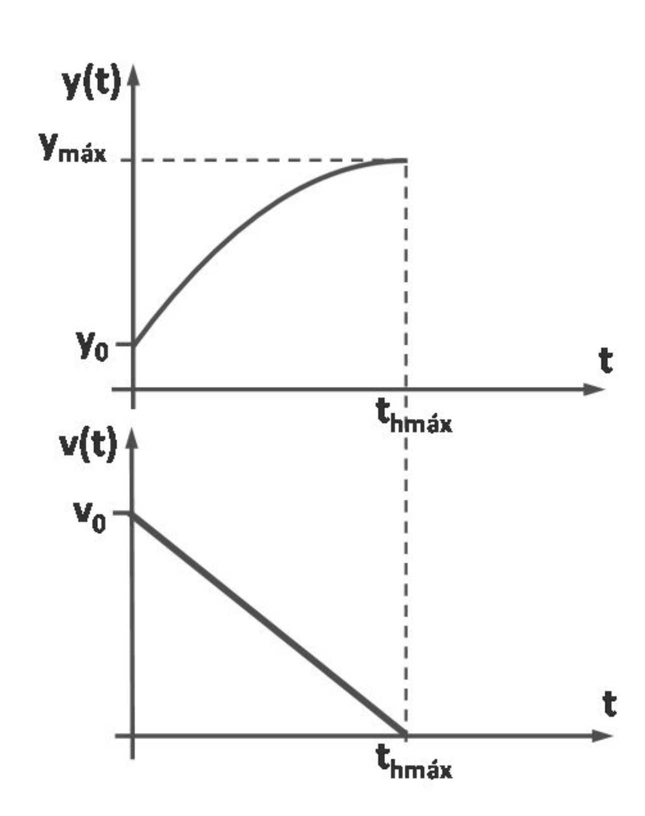
$v(h_{máx}) = 0$ → $0 = v_0 - g\, t(h_{máx})$

→ $t(h_{máx}) = v_0 / g$

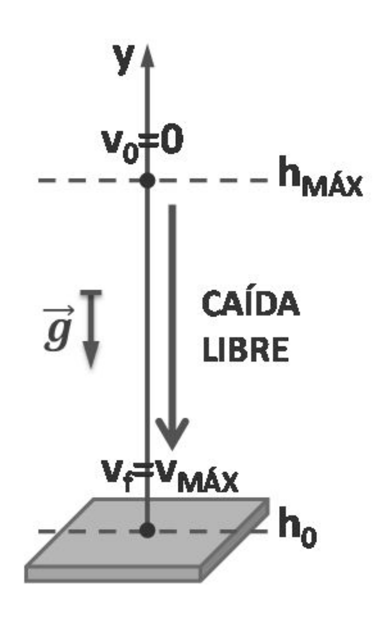
La distancia Δy que sube desde el lanzamiento es:

$$y(t_{hmáx}) - y_0 = v_0\, t_{hmáx} - \frac{1}{2} g\, {t_{hmáx}}^2$$

$$\Delta y = v_0\, \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{{v_0}^2}{2g}$$



13.9.4 CL

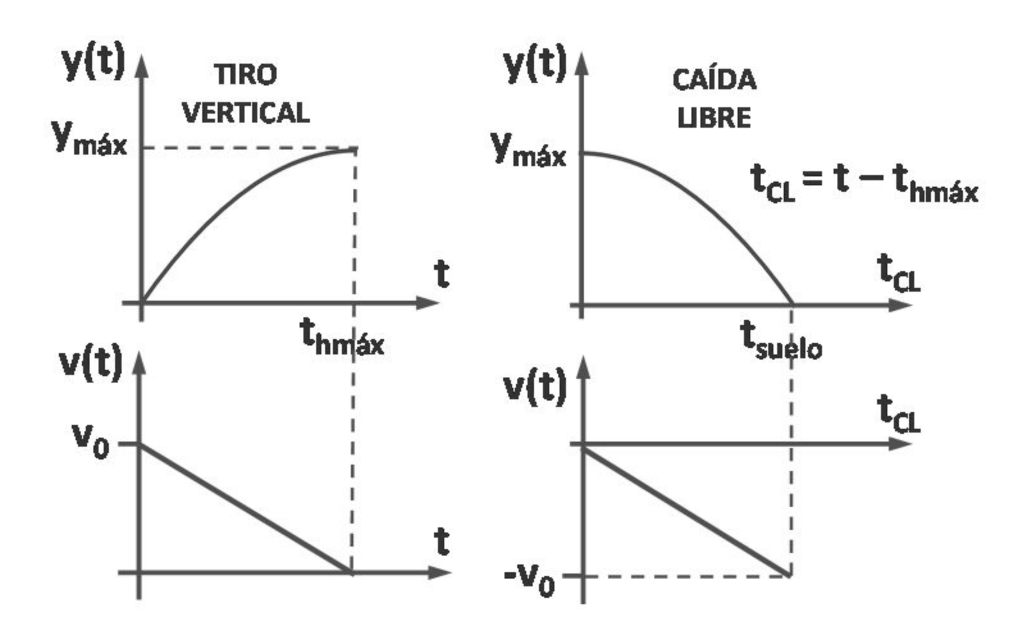


Un *caso particular de MRUV*, llamado **CL (caída libre)**, se da cuando una partícula es soltada desde una altura máxima (velocidad inicial cero, si no fuese así, la caída no sería "libre"), y como consecuencia de ello, por su peso desciende hacia la Tierra en forma acelerada con aceleración de la gravedad $\vec{g}$, llegando hasta el piso, donde tendrá una velocidad final máxima.

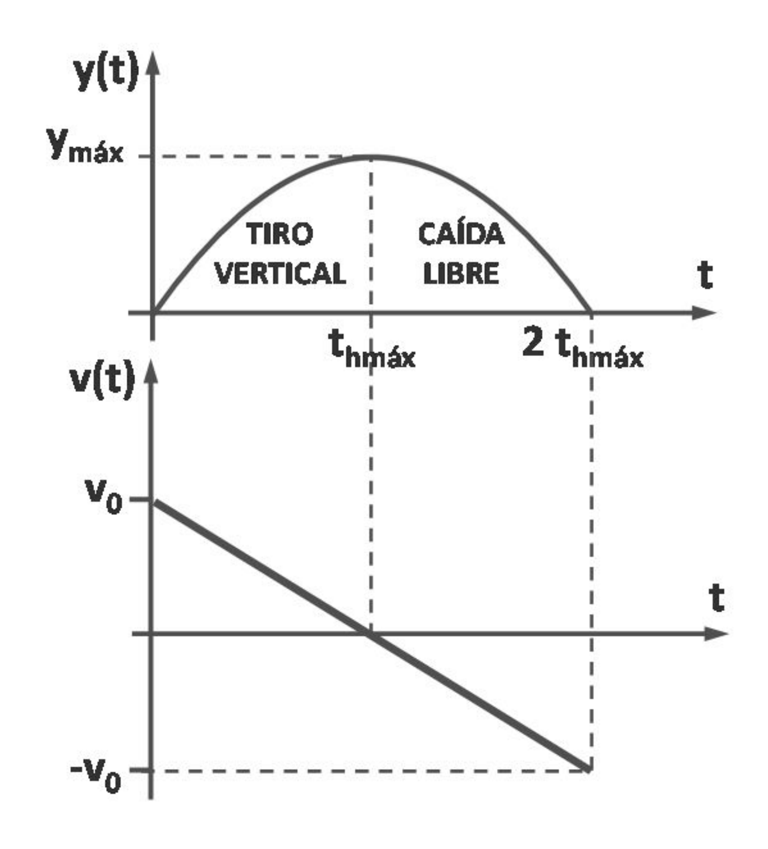
El movimiento es acelerado y rectilíneo por lo tanto sus ecuaciones son las del MRUV con aceleración $\vec{g}$ iguales que en el TV, sólo que ahora cambian los datos iniciales, la $v_0=0$ y la $h_0=y_{máx}$.

Las ecuaciones son las ya vistas (MRUV) sólo que en el eje vertical (donde g=9,8 m/s^2); si usamos un *tiempo propio* (t=0 desde que empieza el CL), quedan:

CL		
$\vec{r}(t_{CL}) = \left(y_{máx} + \frac{1}{2}\vec{g}\, t_{CL}{}^2\right) \check{\jmath}$	$\vec{v}(t_{CL}) = \vec{g}\, t_{CL}\, \check{\jmath}$	$\vec{a} = \vec{g} = -g\, \check{\jmath}$



Pero como tanto TV como CL son parte de un mismo MRUV que tiene igual aceleración, podemos usar las mismas ecuaciones, para eso necesitamos un *tiempo unificado t* para ambos, ese tiempo es el tiempo desde el lanzamiento (tiro vertical), ya que si dejamos actuar a la naturaleza, no sólo que asciende, sino que también cae:



Ej. N°20: [youtube canal "alexander estrada" / mod gp]. Un helicóptero asciende verticalmente con una rapidez de 7,8 m/s. A una posición $\vec{r}(t) = 130\ m\ \check{\jmath}$, una persona suelta un paquete desde una ventanilla. ¿Cuánto tiempo tarda el paquete en llegar al suelo, y a qué velocidad impacta con el suelo?

Como dijimos más arriba, lo primero y principal es identificar el movimiento, luego escribir sus ecuaciones. Se trata de un TV inicial, que luego de llegar a la altura máxima, el paquete cae en CL, es decir es un único MRUV vertical con aceleración $\vec{g}$:

TV+CL

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\ t + \frac{1}{2}\vec{g}\ t^2 \qquad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}\ t \qquad \vec{a} = \vec{g} = -g\ \check{\jmath}$$

De la primera ecuación podemos obtener el instante donde $\vec{r}(t) = 0$.

$$\vec{0} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\ t_{suelo} + \frac{1}{2}\vec{g}\ {t_{suelo}}^2$$

$$0 = 130m + 7{,}8\frac{m}{s}t_{suelo} - 4{,}9\frac{m}{s^2}\ {t_{suelo}}^2$$

Donde como dijimos en páginas anteriores, necesitamos tener las unidades puestas en el sistema de unidades (SIMELA) lo que nos permite escribir más abreviadamente la ecuación sin unidades, y el resultado será también dentro del SIMELA.

$$0 = 130 + 7{,}8\ t_{suelo} - 4{,}9\ {t_{suelo}}^2$$

Lo que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

t = -4,416 seg   y   t = 6 seg

Pero no es válido t<0 por lo tanto nuestro resultado buscado es t = 6 seg.

Sólo falta hallar qué velocidad tiene en ese instante:

$$\vec{v}(6\ seg) = 7{,}8\frac{m}{s}\check{\jmath} - 4{,}9\frac{m}{s^2}\ 6\ s\ \check{\jmath}$$

Y como todo está en j podemos escribir:

$$v(6) = 7{,}8 - 4{,}9\ .\ 6$$

Que es una simple ecuación de la recta cuya solución da: $\vec{v}(6\ seg) = -21{,}6\frac{m}{s}\check{\jmath}$

Podríamos hallar también la posición donde el paquete alcanza su altura máxima, eso ocurrirá, naturalmente, cuando su velocidad sea cero: $v(t_{hmáx}) = 7{,}8 - 9{,}8\ t_{hmáx} = 0$ lo que resulta $t_{hmáx} = 0{,}796$ seg. Por lo tanto es muy fácil, ya teniendo t, calcular la posición en ese instante:

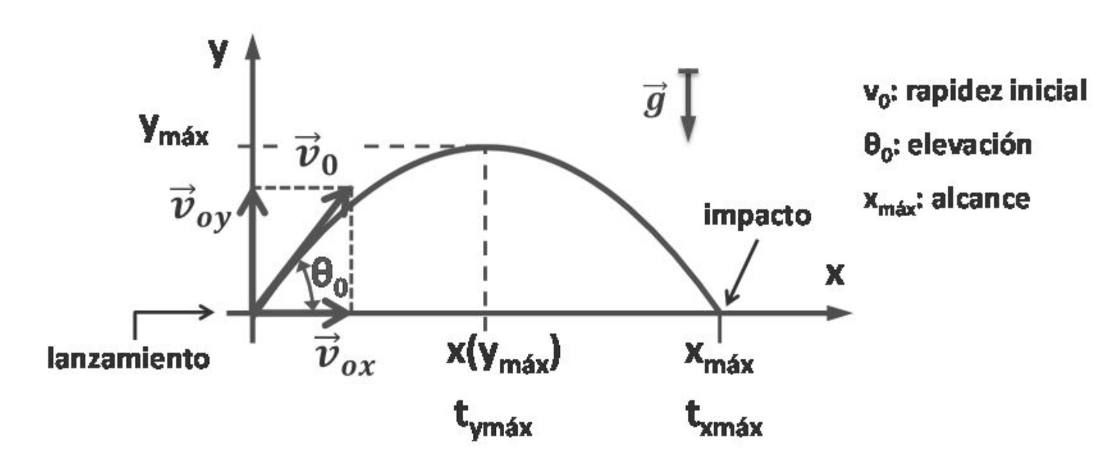
$$\vec{r}(0{,}796) = 130\ m\ \check{\jmath} + 7{,}8\frac{m}{s}\ \check{\jmath}\ 0{,}796\ s - 4{,}9\frac{m}{s^2}(0{,}796\ s)^2 = 133{,}1\ m\ \check{\jmath}$$

13.9.5 TO





Hasta ahora hemos visto movimientos exclusivamente rectilíneos, como un auto que se mueve a velocidad constante o acelerando, o un objeto que sube o baja verticalmente. Veremos ahora un *movimiento curvilíneo*, se trata de un proyectil que es lanzado con un ángulo inicial menor a 90°, que avanza en el plano XY sometido a la aceleración de la gravedad, volando hasta el momento del impacto con el suelo, lo que llamamos **TO (tiro oblícuo)**. Es el caso típico del proyectil de un cañón, que se eleva hasta su altura máxima, y luego cae hasta el impacto, o el lanzamiento de una pelota de básquet para embocar en el aro[13]. El tiro puede ser hasta incluso horizontal, a eso lo llamamos tiro horizontal (TH) y será un caso particular de tiro oblicuo.



Las ecuaciones son las del movimiento con aceleración constante, pero como el movimiento tiene *velocidad y aceleración que no son colineales* (recordemos que para que se de un MRUV tienen que ser colineales) entonces el movimiento no será rectilíneo, será curvilíneo, y la aceleración hace tender la velocidad a su dirección y sentido:

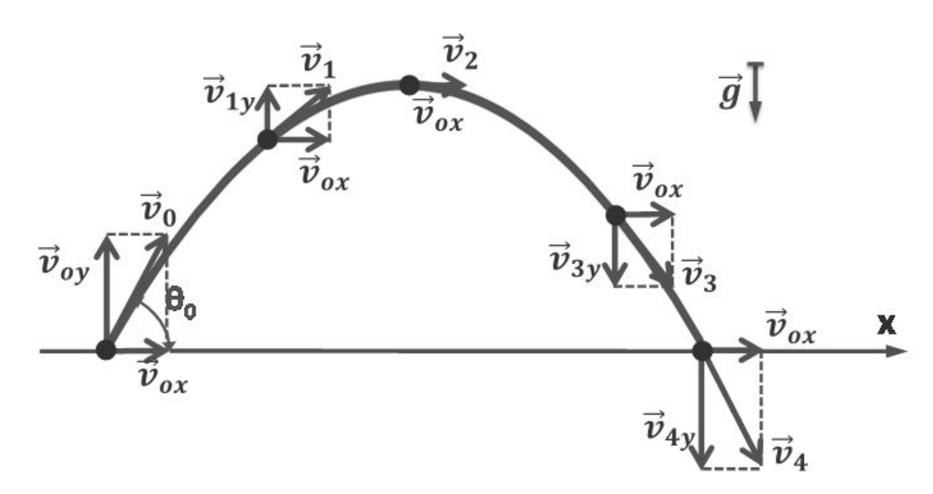
TO	Eje x	Eje y
$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2$	$x(t) = x_0 + v_x\, t$	$y(t) = y_0 + v_{oy}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$
$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}\, t$	$v_x(t) = v_{ox}$	$v_y(t) = v_{oy} - g\, t$
$\vec{a}(t) = \vec{g}$	$a_x(t) = 0$	$a_y(t) = -g$

Las ecuaciones en el eje x son similares a las del MRU porque el dicho eje no hay aceleración alguna, y en el eje y son similares a las del MRUV, porque hay aceleración cons-

[13] Simulación web del TO. https://www.walter-fendt.de/html5/phes/projectile_es.htm

tante en ese eje, pero debe quedar claro que **el movimiento es curvilíneo y es en el espacio**, no es rectilíneo ni se mueve nada en los ejes.

La velocidad va cambiando instante a instante debido a que sufre una aceleración. Mostremos cinco puntos sobre la trayectoria:



Analicemos la velocidad inicial: $v_{ox} = v_o \cos\theta_0$ $\quad v_{oy} = v_o \, sen\, \theta_0$

$$v_o = \sqrt{{v_{ox}}^2 + {v_{oy}}^2} \qquad \theta_0 = arc\, tg \frac{v_{oy}}{v_{ox}}$$

Al momento de alcanzar $h_{máx}$: $\quad v_y(hmáx) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = v_{oy} - g\, t_{hmáx}$

Y entonces: $\quad t_{hmáx} = \frac{v_{oy}}{g}$ $\quad$ y como: $\quad hmáx = v_{oy}\, t_{hmáx} - \frac{1}{2} g\, {t_{hmáx}}^2$

Reemplazando: $\quad hmáx = v_{oy} \frac{v_{oy}}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{oy}}{g}\right)^2 = \frac{{v_{oy}}^2}{2\,g}$

Al momento de alcanzar $x_{máx}$: $\quad$ y(xmáx)=0 $\quad \Rightarrow \quad 0 = v_{oy}\, t_{xmáx} - \frac{1}{2} g\, (t_{xmáx})^2$

Factoreando: $\quad 0 = t_{xmáx}\left(v_{oy} - \frac{1}{2} g\, t_{xmáx}\right) \Rightarrow t_{xmáx} = 0 \;\vee\; v_{oy} - \frac{1}{2} g\, t_{xmáx} = 0$

Por lo tanto: $\quad t_{xmáx} = \frac{2\, v_{oy}}{g}$

Y con este tiempo, podremos hallar el alcance del proyectil $x_{máx}$:

$$x_{máx} = v_{ox}\, t_{xmáx} = v_{ox} \, \frac{2\, v_{oy}}{g} = 2\, \frac{v_o \cos\theta_0 \, v_o\, sen\, \theta_0}{g} = \frac{{v_o}^2}{g} 2 \cos\theta_0 \, sen\, \theta_0$$

Y usando la identidad trigonométrica N°17: $\quad sen\,(2\alpha) = 2\, sen\alpha\, cos\alpha$

Queda: $\quad x_{máx} = \frac{{v_o}^2}{g}\, sen\,(2\theta_0)$

Con lo cual hemos obtenido el alcance en función de la rapidez inicial y el ángulo de elevación, que es lo que se pretende saber de un proyectil.

Hasta ahora nos hemos manejado con las ecuaciones paramétricas del movimiento, es decir *"todo en función de t"*, queda por analizar la **ecuación de la trayectoria y=f(x)**.

Eso se hace reemplazando t = x / v_{ox} en la función y(t), por lo tanto lo que queda es:

$$y(x) = x\ tg\theta_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_{ox}}^2}$$

Ej. N°21: Un proyectil es lanzado en tiro oblicuo a 60°; el cañón le impulsa una rapidez de 300 m/s. Hallar la distancia horizontal a la que impactará el proyectil.

Resolución: lo pedido es lo habitualmente deseado en un proyectil, para saber esto es que se desarrollaron las ecuaciones vistas. Puede usarse la última fórmula deducida:

$$x_{máx} = \frac{{v_o}^2}{g}\ sen\ (2\theta_0) = \frac{300^2}{9{,}8}\ sen\ (2\ .\ 60°) = 7953\ m$$

Ej. N°22: Un proyectil es lanzado a una rapidez de 400 m/s y se desea que impacte en un blanco que se encuentra a 6 km. Hallar el ángulo al que elevar el cañón.

Resolución: esta es la otra aplicación típica del tiro oblicuo. Usando la última ecuación demostrada del tiro oblicuo:

$$x_{máx} = \frac{{v_o}^2}{g}\ sen\ (2\theta_0)$$

$$sen\ (2\theta_0) = \frac{g\ x_{máx}}{{v_o}^2} = \frac{9{,}8\ .\ 6000}{400^2} = 0{,}3675$$

Siempre conviene frenar en la función trigonométrica, pues, o pueden (quizás) dar valores fuera del conjunto imagen del seno, o puede resultar en dos valores de ángulos. De aquí se despeja que el doble del ángulo (llamémosle β) es:

$$\beta = arc\ sen\ 0{,}3675 = 21{,}56°\ y\ 158{,}4°$$

Y de ahí podemos despejar el ángulo de elevación del cañón (dos ángulos):

θ_1 = 21,56/2 = 10,78° y θ_2 = 158,4°/2 = 79,2°

Los dos ángulos son válidos, siempre que sean menores a 90°, como es este caso. A estos ángulos se los suele llamar ángulo *por elevación*, y ángulo *rasante*.

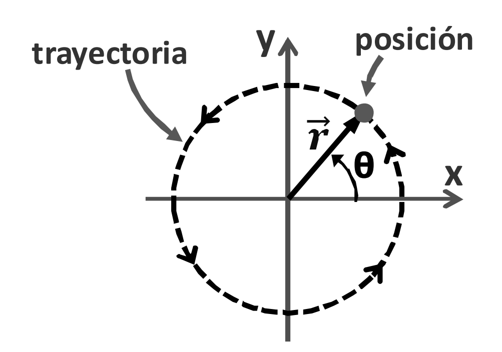
13.9.6 MCU

Se llama **MCU (movimiento circular uniforme)** al movimiento de una partícula cuya trayectoria es una circunferencia de radio R con rapidez constante[14] y rapidez angular ω (en radianes/seg) constante. La posición comenzando desde el ángulo normalizado θ=0 y girando en sentido antihorario[15], puede escribirse y graficarse[16]:

[14] Simulación web MCU de la U. de Boston. http://physics.bu.edu/~duffy/HTML5/circular_motion.html

[15] Se sobreentiende que girar en sentido antihorario y arrancar el movimiento en θ=0 no es la única posibilidad, se puso así a manera de ejemplo.

[16] Simulación web MCU graficando x e y. https://www.walter-fendt.de/html5/phes/circularmotion_es.htm



Posición:

$$\vec{r}(\theta) = R\ cos\ \theta\ \check{\imath} + R\ sen\ \theta\ \check{\jmath}$$

$$\theta = \omega\ t$$

Ecuaciones paramétricas:

$$x(\theta) = R\ cos\ \theta$$

$$y(\theta) = R\ sen\ \theta$$

La partícula tiene una trayectoria curvilínea, lo cual indica que tiene una aceleración que no es colineal con la velocidad (caso contrario sería un movimiento rectilíneo). Podemos obtener velocidad y aceleración, de la función posición de más arriba:

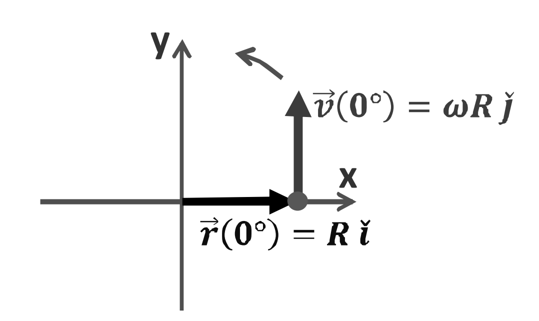
$$\vec{r}(t) = R\ cos(\omega t)\ \check{\imath} + R\ sen(\omega t)\ \check{\jmath}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega R\ sen(\omega t)\ \check{\imath} + \omega R\ cos(\omega t)\ \check{\jmath}$$

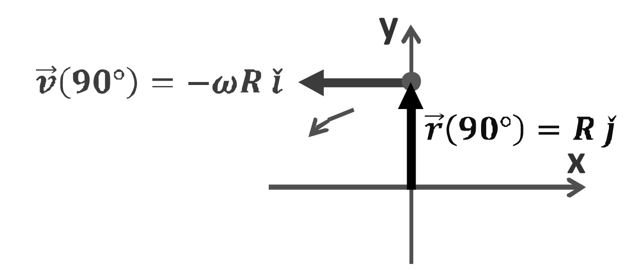
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\ \omega^2 R\ cos(\omega t)\ \check{\imath} -\ \omega^2 R\ sen(\omega t)\ \check{\jmath}$$

Grafiquemos algunas posiciones y velocidades de la partícula:

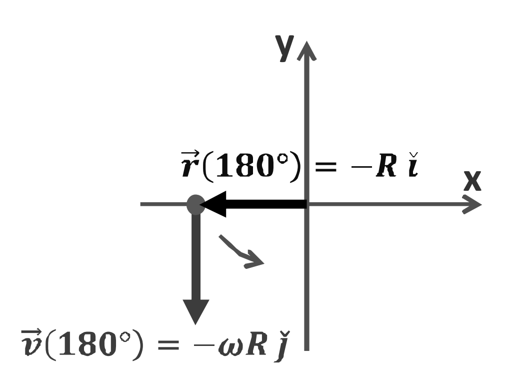
Partícula en θ=0°



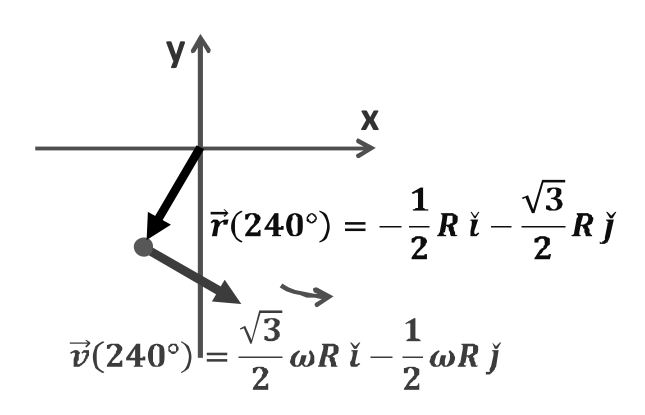
Partícula en θ=90°



Partícula en θ=180°



Partícula en θ=240°



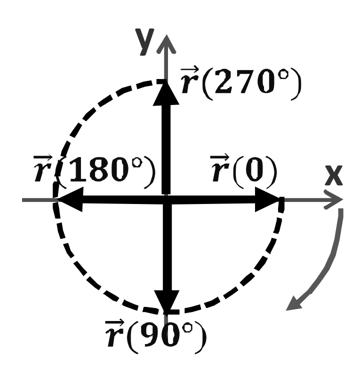
<u>Ej. N°23</u>: Una partícula se mueve en el plano XY según un MCU en sentido horario, con posición $\vec{r}(\theta) = 5m\, cos\, \theta\, \check{\imath} - 5m\, sen\, \theta\, \check{\jmath}$. Lo hace desde θ=0° hasta θ=270°. Grafiquemos la trayectoria completa de la partícula:

$$\vec{r}(0°) = 5m\, cos\, 0°\, \check{\imath} - 5m\, sen\, 0°\, \check{\jmath} = 5m\, \check{\imath}$$

$$\vec{r}(90°) = 5m\, cos\, 90°\, \check{\imath} - 5m\, sen\, 90°\, \check{\jmath} = -5m\, \check{\jmath}$$

$$\vec{r}(180°) = 5m\, cos\, 180°\, \check{\imath} - 5m\, sen\, 180°\, \check{\jmath} = -5m\, \check{\imath}$$

$$\vec{r}(270°) = 5m\, cos\, 270°\, \check{\imath} - 5m\, sen\, 270°\, \check{\jmath} = 5m\, \check{\jmath}$$



<u>Ej. N°24</u>: Un objeto viaja por una vía circular, centrada en el origen, en el plano XY, con una rapidez angular ω constante. Cada posición que adopta en dicho plano se representa con x (t) e y (t), conociéndose esta última, que sin tener en cuenta las unidades, varía en función del tiempo: y (t) = 2 cos (π t – π/12). ¿En qué tiempos t, el objeto cruza el eje x? Expresar todos los t posibles.

LT-TP6-p6

<u>Resolución</u>: es un problema de MCU, porque menciona rapidez angular constante. Leyendo los datos, las ecuaciones paramétricas del movimiento no están completas porque falta x(t), tampoco conocemos el sentido de giro, pero para lo que pide el problema, alcanza con y(t):

Dado y (t) = 2 cos (π t – π/12), corta al eje x cuando y=0 o sea cuando la función coseno tiene ceros (ver en trigonometría):

cos (π t – π/12) = 0 cuando: π t – π/12 = π/2 + k π ; con k ∈ ℤ

Por lo tanto tenemos que resolver la ecuación:

$\pi t - \pi/12 = \pi/2 + k\pi$, factoreando y simplificando π:

$t - 1/12 = 1/2 + k$, por lo tanto t vale:

$t = 1/12 + 1/2 + k = 1/12 + 6/12 + k = 7/12 + k$

Por lo tanto el resultado es $\boldsymbol{t = \frac{7}{12} + k}$ con $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_0$ (porque t≥0)

Ej. N°25: Una partícula avanza en forma circular en el plano XY con rapidez angular constante. La posición que adopta en dicho plano se representa con x(t) e y(t), conociéndose esta última, la que sin tener en cuenta las unidades, varía en función del tiempo: $y(t) = \cos(\pi t + \pi/6)$. ¿Cuál es el menor valor del tiempo t, a partir del comienzo del movimiento (t=0), para el cual la partícula cruza el eje x? ¿Cuál es el período T?

F.19.12 / mod.gp ; LPE-357

Resolución: es un problema de MCU, porque menciona rapidez angular constante. Leyendo los datos, las ecuaciones paramétricas del movimiento no están completas porque falta x(t), tampoco conocemos el sentido de giro, pero para lo que pide el problema, alcanza con y(t):

Dado $y(t) = \cos(\pi t + \pi/6)$, corta al eje x cuando y=0 o sea cuando la función coseno tiene ceros (ver en trigonometría):

$\cos(\pi t + \pi/6) = 0$ cuando $\pi t + \pi/6 = \pi/2 + k\pi$; con $k \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto tenemos que resolver la ecuación:

$\pi t + \pi/6 = \pi/2 + k\pi$, factoreando y simplificando π:

$t + 1/6 = 1/2 + k$, por lo tanto t vale:

$t = 1/2 - 1/6 + k = 3/6 - 1/6 + k = 1/3 + k$ con $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_0$ (porque t≥0)

Por lo tanto el menor valor es **t = 1/3** (k=0)

El período se da cuando la partícula vuelve a ocupar la misma posición, es decir el mismo ángulo, y como es una función coseno, es cada 2π:

$\cos(\pi t + \pi/6 + 2\pi) = \cos[\pi(t + T) + \pi/6]$

$\pi t + \pi/6 + 2\pi = \pi(t + T) + \pi/6$

$\pi t + \pi/6 + 2\pi = \pi t + \pi T + \pi/6 \rightarrow 2\pi = \pi T \rightarrow$ **T = 2**

13.10 Observaciones y resumen

No llamar "espacio" a la distancia recorrida (el espacio en física es $\mathbb{R}^3$). El módulo de la velocidad se llama **rapidez** (speed). El origen de coordenadas es arbitrario; las posiciones, velocidades, y aceleraciones, serán relativas a dicho sistema de coordenadas. El instante t = 0 es arbitrario, lo elegimos según conveniencia y simplicidad. No son relativas las distancias recorridas ni los tiempos entre eventos (no dependen del origen de coordenadas ni del instante inicial elegido). No confundir instantes t, con intervalos de tiempos transcurridos Δt.

Ecuaciones velocidad constante (MRU)	Ecuaciones aceleración constante y MRUV
$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\ t$	$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\,\vec{a}\ t^2$
$\vec{v}(t) = \vec{v}$	$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t$
$\vec{a}(t) = \vec{0}$	$\vec{a}(t) = \vec{a}$
	$v^2 - {v_0}^2 = 2\ a\ \Delta x$ (sólo si estamos en eje x)

PARA RESOLVER LOS PROBLEMAS DE CINEMÁTICA,
ES DE GRAN IMPORTANCIA HACER LO SIGUIENTE:

1) Identificar todos los **móviles** que haya en el problema (auto, proyectil, camión, etc).
2) Identificar todos los **movimientos** (MRU, MRUV, TO) de cada uno de los móviles, en cada intervalo de tiempo.
3) Elegir un **sistema de coordenadas**.
4) Escribir todas las **ecuaciones**, de todos los movimientos, de todos los móviles, en todos los intervalos, referidas al sistema de coordenadas elegido.
5) Hecho el punto (4), resolver las **ecuaciones que determinen** la incógnita deseada.

13.11 Chequeo conceptual

Hacer este chequeo, después de estudiar.

13.11.1 Preguntas conceptuales

13.1) Si en un intervalo de tiempo dado, el vector desplazamiento es nulo, ¿existió movimiento en dicho intervalo? gp

13.2) Sea el lanzamiento de un proyectil en tiro oblicuo. Si analizamos el punto de altura máxima que alcanza el proyectil. ¿Tiene el proyectil en ese punto, velocidad nula? gp

13.3) Describir una situación en que la velocidad de una partícula es opuesta a la posición de la misma. gp

13.4) Describir una situación en la que la velocidad de una partícula sea perpendicular a la aceleración de la misma. gp

13.5) Un proyectil se lanza con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = (4\,;8)\ m/s$. ¿Qué velocidad tendrá en el punto de impacto (alcance)? gp

13.6) Un objeto que se mueve en línea recta con aceleración constante, ¿puede invertir el sentido del movimiento? Sears-cap2-p2.3

13.7) ¿En qué condiciones, la velocidad media es igual a la velocidad instantánea? Sears-cap2-p2.4

13.8) La aceleración que sufre un proyectil que vuela en tiro oblicuo, ¿es constante? web/gp

13.9) En la siguiente serie de fotos a intervalos regulares, donde la persona se desplaza hacia la derecha, ¿puede decirse si la posición de la persona crece o decrece? Prof . Matt Anderson / gp



13.11.2 Respuestas a las preguntas conceptuales 13.11.1

13.1) No lo podemos saber con la información que nos brinda un vector desplazamiento nulo. Tanto puede que sí, como que no. Por ejemplo, tomamos el auto del garaje, viajamos a Rosario, volvemos y estacionamos de nuevo en el garaje. El vector desplazamiento para ese intervalo será nulo, pero el movimiento existió.

13.2) En el punto de altura máxima, es nula la componente vertical de la velocidad, pero no es nula la horizontal. La velocidad en ese punto no es nula.

13.3) Cuando la partícula se mueve acercándose al origen de coordenadas, la velocidad $\vec{v}$ apunta en sentido contrario a la posición $\vec{r}$.

13.4) Dentro de los temas que estamos viendo, esto ocurre en el tiro oblicuo, en el punto de altura máxima; allí la velocidad es totalmente horizontal, y la aceleración $\vec{g}$ es hacia abajo.

13.5) Al impactar con el suelo, la velocidad del proyectil será $\vec{v}_{impacto} = (4\,;-8)\ m/s$

13.6) Sí, puede. Es el caso de tener aceleración en contra de la velocidad; a la larga, la aceleración “gana” y hace que la velocidad se invierta.

13.7) La velocidad media es igual a la instantánea, cuando el movimiento es un MRU.

13.8) Si, la aceleración es en todo momento $\vec{g}$ (aceleración de la gravedad).

13.9) No puede decirse, porque para saber eso, primero debe estar definido algún sistema de coordenadas, que indique el sentido positivo del desplazamiento.

13.12 Problemas con MRU y MRUV

13.10) Una partícula se mueve en MRU en el plano XY con velocidad $\vec{v} = 5\ m/s\ \check{\imath}$ desde la posición inicial $\vec{r}_0 = (0\,;2)\ m$. Hallar:

a) Posición en función del tiempo
b) Ecuaciones paramétricas del movimiento
c) Ecuación de la trayectoria
d) Distancia al origen de coordenadas en el instante t = 1 seg

e) Graficar la trayectoria, la velocidad, y las posiciones $\vec{r}_0$ y $\vec{r}\,(1)$

R:



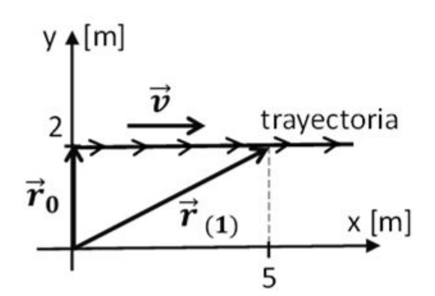
a) $\vec{r}(t) = 2\,m\,\check{j} + 5\,m/s\;t\;\check{i}$

b) $x(t) = 5\,m/s\;t \qquad y(t) = 2\,m$

c) $y = 2\,m$

d) $|\vec{r}(1)| = 5{,}39\,m$

e)



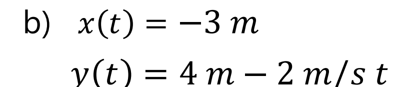
gp

13.11) Una partícula se mueve en MRU en el plano XY con velocidad $\vec{v} = -2\,m/s\;\check{j}$ desde la posición inicial $\vec{r}_0 = (-3\,;4)\,m$. Hallar:

a) Posición en función del tiempo
b) Ecuaciones paramétricas del movimiento
c) Ecuación de la trayectoria
d) Distancia al origen de coordenadas en el instante t = 2 seg
e) Graficar la trayectoria, la velocidad, y las posiciones $\vec{r}_0$ y $\vec{r}\,(2)$

R:

a) $\vec{r}(t) = (-3\,;4 - 2\,t)\,m/s$



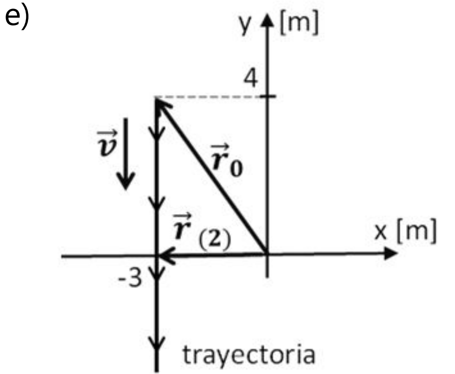
b) $x(t) = -3\,m$

$y(t) = 4\,m - 2\,m/s\;t$

c) $x = -3\,m$

d) $|\vec{r}(2)| = 3\,m$

e)



gp

13.12) Una partícula se mueve en MRU en el plano XY con velocidad $\vec{v} = (3\,;\;2)\,m/s$ desde la posición inicial $\vec{r}_0 = (-2\,;\;2)\,m$. Hallar:

a) Posición en función del tiempo
b) Ecuaciones paramétricas del movimiento
c) Ecuación de la trayectoria
d) Vector posición en t = 2 seg
e) Graficar la trayectoria, la velocidad, y la posición $\vec{r}_0$

R:

a) $\vec{r}(t) = (-2\,;2)\,m + t\,(3\,;2)\,m/s$

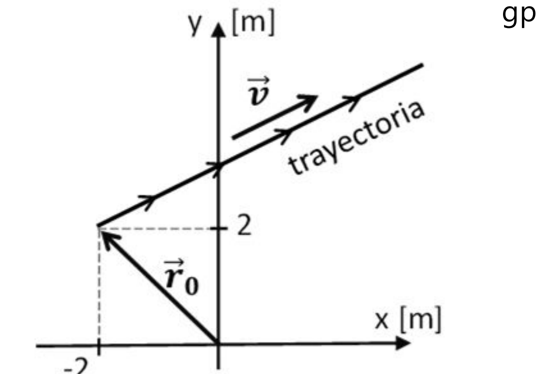
b) $x(t) = (-2 + 3\,t)\,m$

$y(t) = (2 + 2\,t)\,m$

c) $y = 2/3\,x + 10/3\,m$

d) $\vec{r}(2) = (4\,;6)\,m$

e)



gp

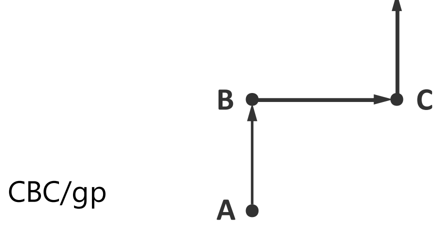
13.13) Un camión recorre la trayectoria plana, vista desde arriba, que se muestra en la figura, desde el punto A hasta el D. En cada tramo, las velocidades son constantes. Se indican también los tiempos invertidos por el camión en cada trayecto. Hallar la velocidad media del recorrido A → D.

$\vec{v}_{AB} = 10\, m/s\, \check{j}$ $\quad \Delta t_{AB} = 10\, s$

$\vec{v}_{BC} = 8\, m/s\, \check{i}$ $\quad \Delta t_{BC} = 12\, s$

$\vec{v}_{CD} = 15\, m/s\, \check{j}$ $\quad \Delta t_{CD} = 5\, s$

R : $\vec{v}_{AD} = 3{,}5\, m/s\, \check{i} + 6{,}5\, m/s\, \check{j}$ CBC/gp



13.14) Una partícula varía su posición en el tiempo, en el plano el plano XY, en t ≥ 0, de acuerdo con las ecuaciones paramétricas siguientes:

$x(t) = t$ $\quad y(t) = 3/4\ t$

Hallar:

a) Posición en función del tiempo
b) Posición en los instantes t_1 = 4 seg, t_2= 8 seg, y t_3=12 seg
c) Ecuación de la trayectoria
d) Desplazamiento en (t_1 ; t_2) y en (t_2 ; t_3)
e) De acuerdo al resultado obtenido en (c), informar si el movimiento es un MRU o un MRUV, y escribir las ecuaciones vectoriales de velocidad y aceleración
f) Graficar la trayectoria y la posición en t = 4 seg

R : a) $\vec{r}(t) = t\, \check{i} + 3/4\ t\, \check{j}$ LPE-460 / y agregados gp

b) $\vec{r}(4\, s) = (4\, ; 3)m$ $\quad \vec{r}(8\, s) = (8\, ; 6)m$ $\quad \vec{r}(12\, s) = (12\, ; 9)m$

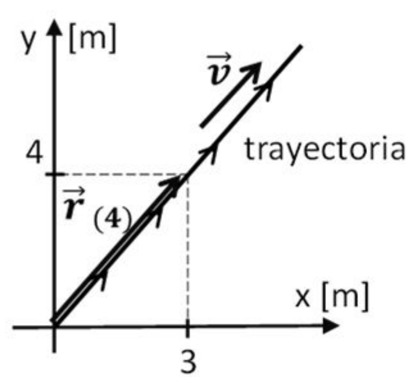
c) y = ¾ x

d) $\Delta\vec{r}\,(4; 8) = (4\, ; 3)\, m$ $\quad \Delta\vec{r}\,(8; 12) = (4\, ; 3)\, m$

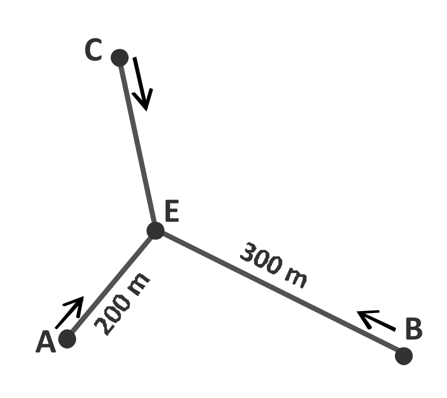
e) se trata de un MRU (la velocidad es constante), que tiene velocidad y aceleración siguientes:

$\vec{v}\,(t) = 1\, m/s\, \check{i} + 3/4\, m/s\, \check{j}$ $\quad \vec{a}\,(t) = \vec{0}$

f)



13.15) Tres móviles parten en el mismo instante desde los puntos A, B y C, en trayectorias rectilíneas. A los 10 segundos, los tres móviles se encuentran simultáneamente en el punto E. El móvil que parte de A desarrolla un MRU, el móvil que parte de B desarrolla un MRUV con rapidez inicial 20 m/s, el móvil que parte de C, desarrolla un MRUV con rapidez inicial 30 m/s y aceleración de módulo 2 m/s^2 y sentido en contra del movimiento. Determinar:



a) Rapidez del móvil que recorre $\overline{AE}$
b) Módulo de la aceleración que tiene el móvil que recorre $\overline{BE}$
c) Distancia $\overline{CE}$

R: a) rapidez = 20 m/s — P2.T49.1603 / modif gp
b) módulo de la aceleración = 2 m/s^2
c) $\overline{CE}$ = 200 m

13.16) Una partícula inicia el movimiento en t=0, según la posición $\vec{r}(t) = (t^2 - t - 2)\,\check{\imath}$

Hallar:

a) Ecuaciones paramétricas del movimiento
b) Posición inicial de la partícula.
c) Instantes en que la partícula pasa por el origen de coordenadas.
d) En dónde se encuentra la partícula al cabo de 5 seg.
e) Velocidad media en el intervalo que va de 2 a 3 seg.

R: a) $x(t) = t^2 - t - 2$ $\quad y(t) = 0$ — LT-TP7-prob1
b) $\vec{r}(0) = -2\,m\,\check{\imath}$ c) t = 2 s
d) $\vec{r}(5) = 18\,m\,\check{\imath}$ e) $\vec{v}_m = 4m/s\,\check{\imath}$

13.17) Un vehículo marcha inicialmente con $\vec{v}_0 = (15\,;0)m/s$ en un movimiento rectilíneo, y en eso ocurre que:

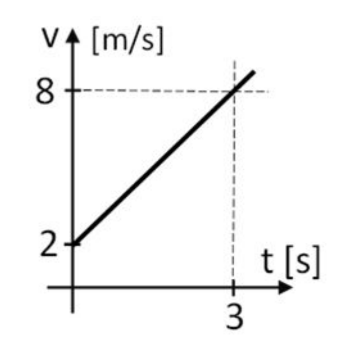
a) Aumenta su rapidez a razón de 1 m/s cada segundo. Hallar la distancia recorrida al cabo de 6 segundos.

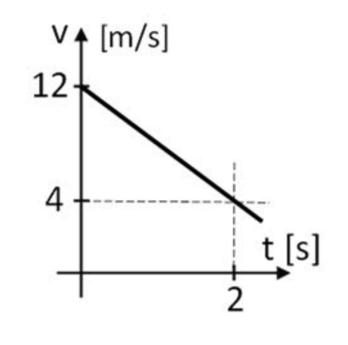
b) Si en cambio, la situación fuera que disminuye su rapidez a razón de 1 m/s cada segundo, hallar la distancia recorrida al cabo de 6 segundos, y el tiempo que tardará en detenerse.

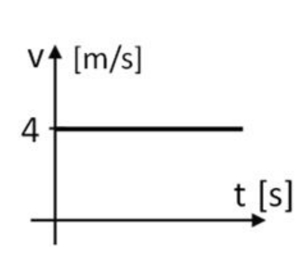
R: a) 108 m b) 72 m Δt = 15 s — LT-TP7-prob3/gp

13.18) Los siguientes gráficos más abajo, son tres diferentes casos de la función escalar **velocidad** de una partícula en función del tiempo v(t), que se encuentra en movimiento rectilíneo en x:

a) b) c)







Para cada caso, indicar de qué movimiento se trata, y expresar la función vectorial de la velocidad, y de la aceleración.

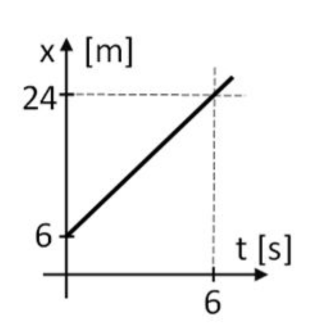
R : a) MRUV: $\vec{v}\,(t) = (2\,m/s + 2\,m/s^2\,t)\,\check{\imath}$ $\vec{a}\,(t) = 2\,m/s^2\,\check{\imath}$ CBC

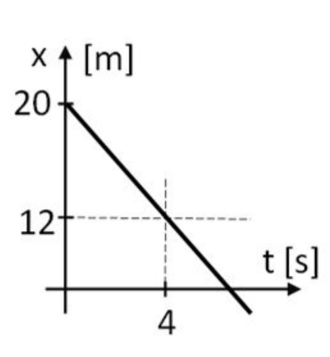
b) MRUV: $\vec{v}\,(t) = (12\,m/s - 4\,m/s^2\,t)\,\check{\imath}$ $\vec{a}\,(t) = -4\,m/s^2\,\check{\imath}$ /gp

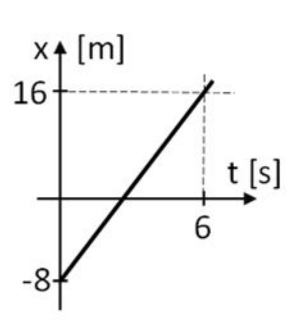
c) MRU: $\vec{v}\,(t) = 4\,m/s\,\check{\imath}$ $\vec{a}\,(t) = \vec{0}$

13.19) Los siguientes gráficos son tres diferentes casos de la función escalar **posición** de una partícula en función del tiempo, que está en movimiento rectilíneo en x:

a) b) c)







Para cada caso, indicar qué movimiento es, expresar la función vectorial de la posición, de la velocidad, e indicar en qué instante pasa la partícula por x = 0.

R : a) MRU: $\vec{r}(t) = (6\,m + 3\,m/s\,t)\,\check{\imath}$ $\vec{v}(t) = 3\,m/s\,\check{\imath}$ $t = -2\,s$ CBC/

b) MRU: $\vec{r}(t) = (20\,m - 2\,m/s\;\;t)\,\check{\imath}$ $\vec{v}(t) = -\,2\,m/s\,\check{\imath}$ $t = 10\,s$ gp

c) MRU: $\vec{r}(t) = (-\,8\,m + 4\,m/s\;\;t)\;\check{\imath}$ $\vec{v}(t) = 4\,m/s\,\check{\imath}$ $t = 2\,s$

13.20) Un tren arranca desde una estación cuya posición es $\vec{r}_A = (0; 0)\,m$, y avanza en el sentido x >0, aumentando su rapidez durante 10 s, hasta llegar a la posición $\vec{r}_B = (100; 0)\,m$. A partir de ese momento, continúa moviéndose en MRU hasta la posición $\vec{r}_C = (10100; 0)\,m$. Ahí, empieza a frenar con una aceleración constante (MRUV) tomándole 8 s hasta detenerse en la estación siguiente de su ruta (punto D). Se pide:

a) Escribir las ecuaciones escalares a(t), v(t) y x(t) para todos los móviles, para todos los movimientos que tenga cada uno de ellos, en todos los intervalos,

y tomando un único tiempo unificado para todas ellas

b) Repetir el punto anterior (a), pero tomando tiempos propios a partir del punto donde empieza cada intervalo.

c) Aceleración en el tramo AB

d) Tiempo empleado en recorrer el tramo BC

e) Aceleración en el tramo CD

f) Distancia recorrida en el tramo CD

g) Posición en el punto D

h) Tiempo total empleado para ir desde la estación A hasta la D

i) Graficar, marcando los puntos A, B, C, D, la función escalar $v_x(t)$

P2.T1.14.11 / modificado y agregados gp

R: a)

$\overline{AB}: (MRUV)$: $a = 2 \quad v = 2t \quad x = t^2$

$\overline{BC}: (MRU)$: $a = 0 \quad v = 20 \quad x = 100 + 20(t - 10)$

$\overline{CD}: (MRUV)$: $a = -2{,}5 \quad v = 20 - 2{,}5\,(t - 510)$

$x = 10100 + 20(t - 510) - 1{,}25(t - 510)^2$

b)

$\overline{AB}: (MRUV)$: $a = 2 \quad v = 2t_{AB} \quad x = {t_{AB}}^2$

$\overline{BC}: (MRU)$: $a = 0 \quad v = 20 \quad x = 100 + 20\,t_{BC}$

$\overline{CD}: (MRUV)$: $a = -2{,}5 \quad v = 20 - 2{,}5\,t_{CD}$

$x = 10100 + 20\,t_{CD} - 1{,}25\,{t_{CD}}^2$

c) $\vec{a}_{AB} = (2; 0)\,m/s^2$

d) Δt_{BC} = 500 s

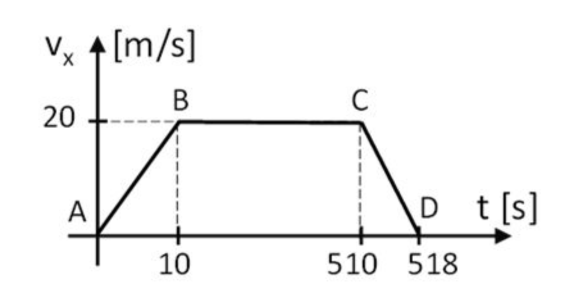
e) $\vec{a}_{CD} = (-2{,}5\,; 0)\,m/s^2$

f) d_{CD} = 80 m

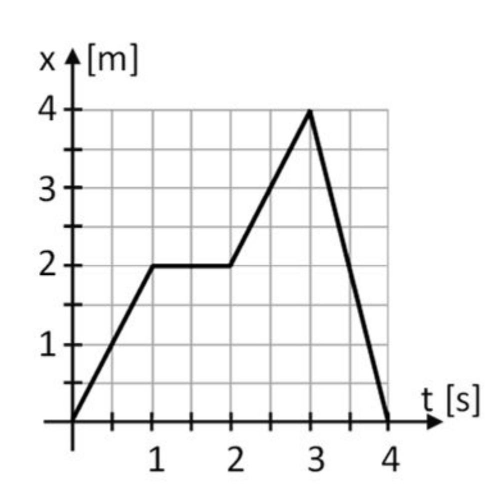
g) $\vec{r}_D = (10180\,; 0)\,m$

h) Δt_{AD} = 518 s

i)



13.21) Una partícula se mueve en movimiento rectilíneo, adoptando la posición x(t) que muestra la figura:



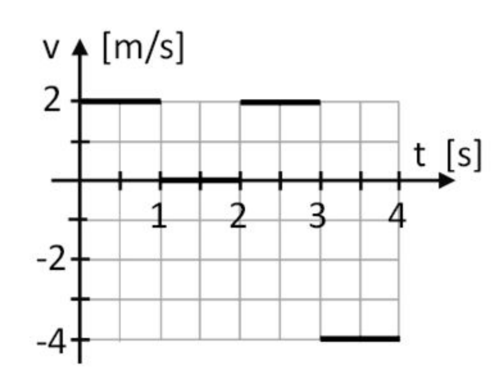
a) Identificar todos los tipos de movimiento que adopta la partícula

b) Graficar la función v(t)

c) Escribir todas las ecuaciones, de todos los movimientos identificados en (a), y todas referidas al mismo eje del tiempos

R: a) t ∈ [0 ; 1] : MRU ; t ∈ [1 ; 2] : reposo (sin movimiento) LT-TP7-prob2/gp
t ∈ [2 ; 3] : MRU ; t ∈ [3 ; 4] : MRU

b)



c) t ∈ [0 ; 1] : x(t) = 2 m/s t ; v = 2 m/s ; a = 0
t ∈ [1 ; 2] : x(t) = 2 m ; 0 ; a = 0
t ∈ [2 ; 3] : x(t) = 2 m/s (t – 1 s) ; v = 2 m/s ; a = 0
t ∈ [3 ; 4] : x(t) = – 4 m/s (t – 4 s) ; v = – 4 m/s ; a = 0

13.22) La rapidez de un tren que avanza según el eje x > 0, se reduce uniformemente de 12 m/s a 5 m/s. Sabiendo que durante ese tiempo recorre una distancia de 100 m, determinar:

a) Su aceleración.
b) La distancia que recorre a continuación (desde los 5 m/s en adelante) hasta detenerse, suponiendo que mantiene la misma aceleración.

R: a) $\vec{a}\,(t) = -0{,}595\ m/s^2\ \breve{\imath}$ b) 21 m LT-TP7-prob4

13.23) Una partícula parte del reposo, bajando por un plano inclinado, con aceleración constante, recorriendo 9 m en 3 segundos. ¿Cuánto tiempo tarda en adquirir una rapidez de 24 m/s desde que empezó su movimiento?

R: tarda 12 segundos LT-TP7-prob5

13.24) Un auto está parado en un semáforo, esperando que se ponga en verde. En el instante que esto ocurre, se le adelanta un camión que tiene velocidad constante de $\vec{v}_C = (60; 0)\ km/h$. Dos segundos más tarde, arranca el auto con aceleración constante de $\vec{a}_A = (2; 0)\ m/s^2$; y después de 15 segundos de acelerar, el auto continúa su movimiento manteniendo la velocidad adquirida. Se pide:

a) Escribir las ecuaciones escalares a(t), v(t) y x(t) para todos los móviles, para todos los movimientos que tenga cada uno de ellos, en todos los intervalos, y tomando un único tiempo unificado para todas ellas
b) Distancia del semáforo hasta el instante en que el auto alcanza al camión (no confundir distancia con posición)
c) Velocidad del auto en ese instante

R: a) Camión : MRU $a_c = 0$ LT-TP7-prob6

$v_c = 60\ km/h = 50/3$ modif gp

$x_c = v_c\ t$

Auto para [2 ; 17) : MRUV $a_A = 2$

$v_A = 2\ (t-2)$

$x_A = (t-2)^2$

Auto para [17 ; +∞) : MRU $a_A = 0$

$v_A = 30$

$x_A = 225 + 30\ (t-17)$

b) 356 m c) $\vec{v}\ auto(t_E) = (108\ ; 0)\ km/h$

13.25) Un móvil desarrolla un MRUV. A los 10 s, su posición es $\vec{r}\ (10\ s) = (560\ ; 0)\ m$ y su velocidad $\vec{v}\ (10\ s) = (36\ ; 0)\ m/s$. Luego, 10 s más tarde, la posición del móvil es $\vec{r}\ (20\ s) = (840\ ; 0)\ m$. Determinar:

a) Aceleración del móvil, expresada en forma canónica
b) Velocidad inicial, expresada en forma canónica
c) Posición inicial, expresada en forma cartesiana
d) Tiempo que tarda en detenerse

R: a) $\vec{a} = -1{,}6\ \check{\imath}\ m/s^2$ b) $\vec{v}_0 = 52\ \check{\imath}\ m/s$ P2.T148.1803 / mod gp

c) $\vec{r}_0 = (120\ ; 0)\ m$ d) $t_{detención}$ = 32,5 s

13.26) Dos móviles A y B, parten simultáneamente el uno hacia el otro desde el reposo, lo hacen desde los extremos de un tramo $\overline{AB}$ de longitud 5. Los mismos desarrollan movimientos rectilíneos uniformemente variados, con módulo de aceleración a_A = 0,2 y a_B = 0,3. Todas las magnitudes están expresadas en el SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino).

Usando un sistema de coordenadas con origen (x=0) en el móvil A, y sentido x >0 hacia el móvil B, hallar lo siguiente:

a) Instante en el cual se encuentran los móviles
b) Posición del encuentro
c) Distancia recorrida por cada móvil hasta el punto del encuentro
d) Velocidad del móvil A en el instante del encuentro
e) Velocidad del móvil B en el instante del encuentro

R: a) t_E = 4,47 s b) $\vec{r}_E = 2\ m\ \check{\imath}$ LPE-277 / modif gp

c) $dist_A$ = 2 m $dist_B$ = 3 m

d) $\vec{v}_A = 0{,}89\ m/s\ \check{\imath}$ e) $\vec{v}_B = -1{,}34\ m/s\ \check{\imath}$

13.27) Rehacer el problema anterior 13.26, pero colocando el origen de coordenadas en el móvil B, y sentido x > 0 hacia el móvil A.

Comparar resultados y sacar conclusiones.

R: a) t_E = 4,47 s b) $\vec{r}_E = 3\ m\ \check{\imath}$ gp

c) $dist_A = 2$ m $dist_B = 3$ m

d) $\vec{v}_A = -0{,}89\ m/s\ \check{i}$ e) $\vec{v}_B = 1{,}34\ m/s\ \check{i}$

13.28) Un móvil desarrolla un MRUV. En el instante inicial, el móvil tiene una posición de $\vec{r}_0 = (120\ ;0)\ m$, siendo su aceleración $\vec{a} = (2\ ;0)\ m/s^2$. A los 5 segundos, su posición resulta ser $\vec{r}\ (5\ s) = (200\ ;0)\ m$.

Determinar:

a) Velocidad inicial
b) Si a los 5 segundos su aceleración se convierte en $\vec{a} = (-1\ ;0)\ m/s^2$. ¿En cuánto tiempo se detiene, contado a partir del instante inicial?
c) La posición en el instante en que se detiene

R: a) $\vec{v}_0 = (11\ ;0)\ m/s$ b) $26\ s$ P2.T116.1803

c) $\vec{r}_{DETENCIÓN} = (421\ ;0)\ m$

13.29) Un móvil desarrolla un MRUV. En el instante inicial, el móvil tiene una aceleración $\vec{a} = (-2\ ;0)\ m/s^2$. Su posición inicial es $\vec{r}_0(0\ s) = (0\ ;0)\ m$. Se conoce además, que el vector desplazamiento correspondiente al intervalo (5 seg ; 15 seg) resulta ser de $\Delta\vec{r} = \vec{r}\ (15\ s) - \vec{r}\ (5\ s) = (-80\ ;0)\ m$.

Determinar:

a) Velocidad inicial
b) Velocidad a los 5 segundos y a los 15 segundos

R: a) $\vec{v}_0 = (12\ ;0)\ m/s$ F.1612

b) $\vec{v}\ (5) = (2\ ;0)\ m/s$ $\vec{v}\ (15) = (-18\ ;0)\ m/s$

13.30) Un móvil desarrolla un MRUV. En el instante inicial, el móvil tiene posición inicial que es $\vec{r}_0 = (100\ ;0)\ m$, y velocidad inicial de $\vec{v}_0 = (10\ ;0)\ m/s$. Diez segundos más tarde, su velocidad es $\vec{v}\ (10\ s) = (0\ ;0)\ m/s$, manteniendo la misma aceleración.

Determinar:

a) Aceleración del movimiento
b) Posición del móvil en el instante t = 10 s
c) El instante (y la velocidad correspondiente al mismo), en que la posición sea $\vec{r} = (0\ ;0)\ m$

R: a) $\vec{a} = (-1\ ;0)\ m/s^2$ P2.T1.1611

b) $\vec{r}\ (10) = (150\ ;0)\ m$

c) t = 27,3 s $\vec{v} = (-17{,}3\ ;0)\ m/s$

13.31) Entre dos móviles A y B que inicialmente están en reposo, hay una distancia entre ellos de 2 km. En t=0, ambos arrancan un movimiento MRUV horizontal, y se encuentran a 200 m del punto de partida de A. Si la aceleración del móvil A es

$\vec{a}_A = (1\,;0)\;m/s^2$, determinar:

a) El instante en que se produce el encuentro
b) La aceleración del móvil B
c) Velocidad del móvil A en el instante del encuentro
d) Velocidad del móvil B en el instante del encuentro

R: a) t_E = 20 s P2.T701.1703

b) $\vec{a}_B = -9\,\check{\imath}\;m/s^2$

c) $\vec{v}_A(t_E) = 20\,\check{\imath}\;m/s$

d) $\vec{v}_B(t_E) = (-180\,;\;0)\;m/s$

13.13 Problemas con TV y CL

13.32) Desde una posición inicial $\vec{r}_{01} = (0; 100)\;m$ se lanza el cuerpo 1 con velocidad inicial $\vec{v}_{01} = (0; 50)\;m/s$. Dos segundos más tarde, desde la posición inicial $\vec{r}_{02} = (0; 0)\;m$ se lanza otro cuerpo 2 con velocidad inicial $\vec{v}_{02} = (0; 150)\;m/s$

Se pide:

a) Escribir las ecuaciones escalares a(t), v(t) y x(t) para todos los móviles, para todos los movimientos que tenga cada uno de ellos, en todos los intervalos, tomando un único tiempo unificado para todas ellas
b) Tiempo que tarda el segundo, en alcanzar al primero
c) Posición en que el encuentro ocurre
d) Velocidad de cada móvil en ese instante
e) Posición donde se encuentra el segundo, cuando el primero alcanza la altura máxima
f) Posición donde se encuentra el segundo, cuando el primero llega al suelo.

R: a) cuerpo 1: MRUV $a_1 = -9{,}8$ LT-TP7-prob7

$v_1 = 50 - 9{,}8\,t$ modif gp

$x_1 = 100 + 50\,t - 4{,}9\,t^2$

cuerpo 2: MRUV $a_2 = -9{,}8$

$v_2 = 150 - 9{,}8\,(t-2)$

$x_2 = 150\,(t-2) - 4{,}9\,(t-2)^2$

b) 1,5 s c) $\vec{r}_E = (0; 215)\;m$

d) $\vec{v}_1 = (0\,;15{,}7)\;m/s$ $\vec{v}_2 = (0\,;135{,}3)\;m/s$

e) $\vec{r}_2 = (0\,;418)\;m$ f) $\vec{r}_2 = (0\,;1005)\;m$

13.33) Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba, desde la posición inicial $\vec{r}_0 = (0\,;50)\;m$, observándose que tarda 15 segundos en llegar al suelo, es decir su posición a los 15 segundos es $\vec{r}\;(15\;seg) = (0\,;0)\;m$. Determinar:

a) Velocidad inicial del cuerpo
b) Su velocidad, 2 segundos antes de llegar al suelo

c) Su velocidad, al impactar con el suelo
d) Su posición al lograr la altura máxima

R: a) $\vec{v}_0 = (0\,;70{,}2)\ m/s = 70{,}2\ m/s\ \check{j}$ LT-TP7-prob8

b) $\vec{v} = (0\,;-57)\ m/s = -57\ m/s\ \check{j}$

c) $\vec{v} = (0\,;-77)\ m/s = -77\ m/s\ \check{j}$

d) $\vec{r}\,(hmax) = (0\,;301{,}14)\ m$

13.34) Un cuerpo es lanzado desde la posición inicial $\vec{r}_0 = (0\,;10)\ m$, con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = (0\,;30)\ m/s$.

Determinar, usando para los cálculos g=10 m/s^2:

a) La posición cuando la altura alcanza su nivel máximo respecto del nivel de altura cero
b) Tiempo que tarda el cuerpo en alcanzar el nivel de altura cero
c) Velocidad en el instante en que su posición sea $\vec{r} = (0\,;0)\ m$

R: a) $\vec{r}\,(hmáx) = (0\,;55)\ m$ P2.T3.1411

b) $t = 6{,}32\ s$ c) $\vec{v} = (0\,;-33{,}2)\ m/s$

13.35) Dos pelotas se lanzan hacia arriba desde el origen de coordenadas, la primera con velocidad inicial $\vec{v}_{01} = (0\,;10)\ m/s$, la segunda, se lanza un segundo después con una velocidad inicial $\vec{v}_{02} = (0\,;20)\ m/s$. Determinar, usando el valor g = 10 m/s^2:

a) Posición de la primera pelota, cuando alcanza su altura máxima.
b) El instante del encuentro entre las dos pelotas.
c) Posición en que acontece el encuentro.
d) Velocidad de la primera pelota en el encuentro.

R: a) $\vec{r}_1(hmax) = (0\,;5)m$ b) t_E = 1,25 s F.T1.191213 / modif gp

c) $\vec{r}_E = (0\,;\ 4{,}6875)\ m$ d) $\vec{v}_{1E} = (0\,;-2{,}5)\ m/s$

13.36) En un lejano planeta, un astronauta lanza desde el suelo verticalmente hacia arriba un objeto con velocidad inicial $\vec{v}_0 = (0\,;48)\ m/s$, dicho objeto alcanza su altura máxima a los 5 seg desde el instante del lanzamiento. Calcular la posición donde el objeto logra la altura máxima.

R: $\vec{r}\,(hmax) = (0\,;120)m$ P2.T1.21.03

13.14 Problemas con movimiento curvilíneo y TO

13.37) Una partícula desarrolla un movimiento con posición variable en el tiempo según $\vec{r}(t) = (t-1)\ \check{\imath} + (t^2+2)\ \check{j}$ durante el intervalo (en segundos) t ∊ [0; 10]

Hallar:

a) Posición en los instantes t=5 seg y t=10 seg

b) Desplazamiento entre los instantes anteriores
c) Velocidad media entre los instantes anteriores
d) Distancia al origen de coordenadas, al comenzar el movimiento
e) Ecuaciones paramétricas del movimiento
f) Ecuación de la trayectoria

R: a) $\vec{r}(5) = (4\,\check{\imath} + 27\,\check{\jmath})\,m$ $\quad \vec{r}(10) = (9\,\check{\imath} + 102\,\check{\jmath})\,m$ LPE-376 / modif gp

b) $\Delta\vec{r}\,(5;10) = \left(5\,\check{\imath} + 75\,\check{\jmath}\right)m$

c) $\vec{v}_m\,(5;10) = (\,\check{\imath} + 15\,\check{\jmath})\,m/s$

d) $|\vec{r}(0)| = \sqrt{5}\,m$ e) $x(t) = (t-1)$ $\quad y(t) = \left(t^2 + 2\right)$

f) $y(x) = (x+1)^2 + 2$

13.38) Se golpea una pelota del golf para iniciar el primer tiro del hoyo, de manera que su velocidad inicial forma un ángulo de 45° con la horizontal. La pelota llega al suelo a una distancia (horizontal) de 180 m desde el punto en que se lanzó. Determinar su velocidad inicial, y el tiempo de vuelo.

R: $\vec{v}_0 = (42\,m/s\,;45°) = (29{,}7\,;29{,}7)\,m/s$ t = 6,06 s LT-TP7-prob9

13.39) Se dispara un cañón con un ángulo de elevación de 30°, y una rapidez inicial de 200 m/s.

Determinar:

a) La velocidad inicial, expresada en forma canónica
b) El alcance del proyectil
c) La velocidad del proyectil, al llegar al suelo
d) Si a la mitad del recorrido hubiese una colina de 600 m de altitud, ¿impactaría en ella?

R: a) $\vec{v}_0 = \left(100\sqrt{3}\,\check{\imath} + 100\,\check{\jmath}\right)m/s$ LT-TP7-prob10 / modificado gp

b) $x_{MAX} = 3533\,m$

c) $\vec{v}_{IMPACTO} = \left(100\sqrt{3}\,\check{\imath} - 100\,\check{\jmath}\right)m/s$

d) $impacta\ en\ la\ colina$

13.40) Calcular el ángulo de elevación con el que deberá ser lanzado un proyectil, que parte con una rapidez inicial de 400 m/s, para impactar en un blanco situado sobre la horizontal del punto de lanzamiento, y a 5000 m de distancia del punto de disparo.

R: ángulo rasante = 8,1° ángulo por elevación = 81,1° LT-TP7-prob11

13.41) Se lanza una piedra desde 1m sobre el suelo, con velocidad inicial que es el vector $\vec{v}_0 = (40\,m/s\,;26°)$. A una distancia horizontal de 120m del punto de lanzamiento, hay un muro de 2m de altura. Calcule a qué altura por encima del muro, pasará la piedra.

R: pasará 3,2 m por encima del muro LT-TP7-prob12

13.42) Una persona quiere lanzar una pelota por encima de un edificio de 40 m de altura situada a 20 m de distancia de su posición. Para ello, lanzará la pelota con rapidez inicial de 40 m/s y ángulo inicial 45°. La pelota abandona la mano de la persona a una altura de 1,2 m del suelo.

Se desea saber, ¿pasará esta, por encima del edificio? En caso afirmativo, indicar a qué altura por encima del edificio lo hará. En caso negativo, indicar en qué posición chocará la pelota con el edificio.

R: la pelota no pasará por encima del edificio, lo chocará en la posición $\vec{r}(choque) = (20\,\breve{\imath} + 18{,}75\,\breve{\jmath})\,m$ LT-TP7-prob13

13.43) Una partícula se desplaza sobre el plano XY, en t ≥ 0, de manera que las ecuaciones paramétricas de su movimiento son:

$x(t) = t^2 + 2$ $y(t) = 2t$

Se pide hallar:

a) Posición en función del tiempo
b) Distancia al origen de coordenadas en el instante inicial
c) Ecuación de la trayectoria
d) Instante en que la partícula se encuentra en el punto A (6;4)

R: a) $\vec{r}(t) = (t^2 + 2)\,\breve{\imath} + 2\,t\,\breve{\jmath}$ b) 2 m LPE-404
c) $x = y^2/4 + 2$ d) $t_A = 2$ seg

13.44) Un proyectil se dispara en el instante t = 0, a partir de la posición inicial $\vec{r}_0 = (0\,;0)$. A los 10 segundos su posición es $\vec{r}_{10\,seg} = (2000\,;1500)\,m$. Determinar, usando el valor g = 10 m/s^2:

a) Velocidad inicial
b) Ángulo de la velocidad inicial, respecto del eje x > 0
c) Altura máxima que alcanza el proyectil, y su instante correspondiente

R: a) $\vec{v}_0 = (200\,;200)$ m/s b) 45° pex
c) $h\,max = 2000\,m$; ocurre a los 20 seg

13.45) Se dispara un proyectil con posición inicial $\vec{r}_0 = (0\,;50)\,m$, siendo su velocidad inicial $\vec{v}_0 = (30\,;30)\,m/s$. Determinar, usando el valor g = 10 m/s^2:

a) Posición en donde alcanza la altura máxima
b) Tiempo de vuelo del proyectil
c) Velocidad del proyectil a los 5 segundos del disparo

R: a) $\vec{r}(hmax) = (90\,;95)m$ P2.T201.1703 / modificado gp
b) $t_{VUELO} = 7{,}36$ s
c) $\vec{v}\,(5\,seg) = (30\,;-20)\,m/s$

13.46) Se dispara un proyectil con posición inicial $\vec{r}_0 = (0\,;100)\,m$, siendo su velocidad inicial $\vec{v}_0 = (50\,;50)\,m/s$. Determinar, usando el valor g = 10 m/s^2:

a) El alcance del proyectil
b) Tiempo de vuelo hasta llegar a la altura máxima
c) Velocidad del proyectil a los 8 segundos del disparo
d) Velocidad del proyectil al momento del impacto

P2.T202.1703 / modif gp

R: a) x_{MAX} = 585,5 m
b) t_{hMAX} = 5 s
c) $\vec{v}\,(8\,seg) = (50\,;-30)\,m/s$
d) $\vec{v}\,(impacto) = (50\,;-67{,}1)\,m/s$

13.47) Un móvil desarrolla un movimiento curvilíneo, con aceleración constante. En el instante inicial, el móvil tiene una posición inicial $\vec{r}_0 = (100\,;31{,}25)\,m$, y velocidad inicial $\vec{v}_0 = (10\,;60)\,m/s$.

Determinar, usando para los cálculos g=10 m/s^2:

a) El tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima
b) Posición del móvil al alcanzar la altura máxima
c) Velocidad al alcanzar el nivel de altura h = 0
d) Alcance del móvil

R2.T1.1803
modif gp

R: a) $t = 6\,s$
b) $\vec{r}\,(hmáx) = (160\,;211{,}25)\,m$
c) $\vec{v}_{h=0} = (10\,;-65)\,m/s$ d) Alcance = 225 m